



Уральский
федеральный
университет

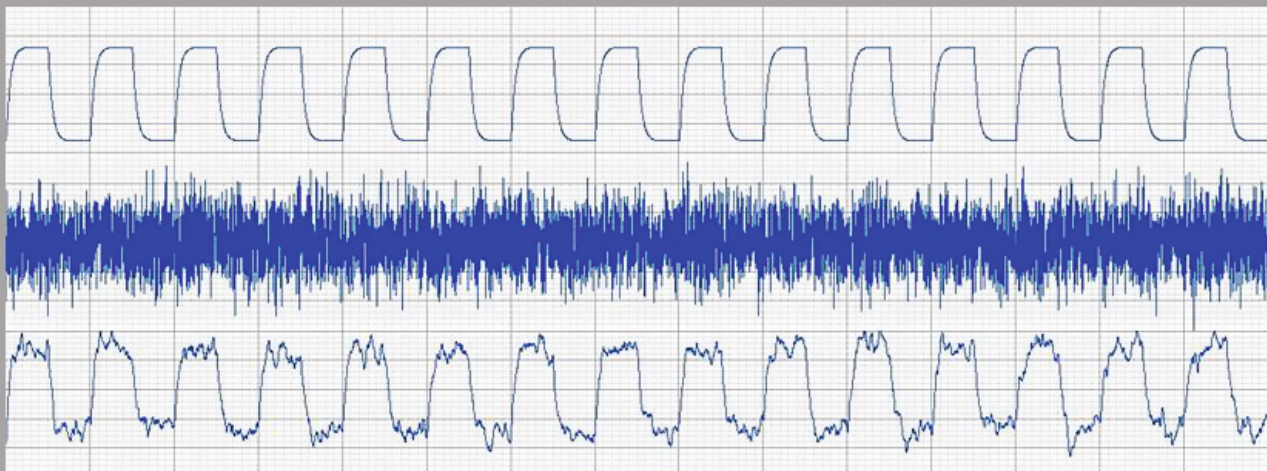
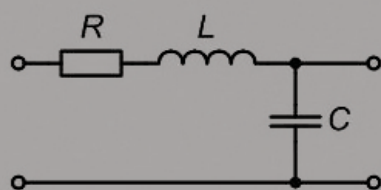
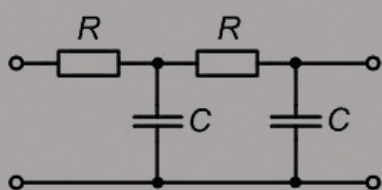
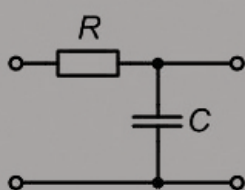
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт радиоэлектроники
и информационных
технологий — РТФ

Ю. В. ШИЛОВ

ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛА И ШУМА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Учебно-методическое пособие



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Ю. В. Шилов

ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛА И ШУМА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета
для студентов вуза, обучающихся по направлениям
подготовки 11.03.01 «Радиотехника»,
11.05.01 «Радиоэлектронные системы и комплексы»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2019

УДК 621.37.037(075.8)

ББК 32.841я73

Ш59

Рецензенты:

И. Г. Коршунов, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой физики
ФГБОУ ВО «Уральский государственный горный университет»;

С. В. Смирнов, д-р техн. наук, директор Института машиноведения
Уральского отделения Российской академии наук

Научный редактор — д-р техн. наук, проф. *Л. Г. Доросинский*

Шилов, Ю. В.

Ш59 Прохождение сигнала и шума через линейные электрические
цепи : уч.-метод. пособие / Ю. В. Шилов. — Екатеринбург : Изд-
во Урал. ун-та, 2019. — 127, [1] с.

ISBN 978-5-7996-2567-2

Данное учебно-методическое пособие посвящено теоретическому и практическому изучению основных характеристик и принципов анализа прохождения детерминированных и случайных сигналов через линейные электрические цепи, а также изучению методов линейной частотной фильтрации гармонических и импульсных сигналов на фоне шума.

Издание состоит из трех частей. В первой части приведены основные теоретические положения, касающиеся детерминированных и случайных сигналов. Вторая часть содержит примеры решения задач и задания для самостоятельной работы. Третья часть состоит из описания трех лабораторных работ. Приведены примеры выполнения домашнего задания к лабораторным работам в программе Mathcad.

УДК 621.37.037(075.8)

ББК 32.841я73

ISBN 978-5-7996-2567-2

© Уральский федеральный
университет, 2019

ВВЕДЕНИЕ

Электрической цепью называется совокупность связанных элементов, образующих путь для электрического тока. Электрические цепи являются основой любого радиотехнического устройства, с их помощью решаются задачи формирования и преобразования электрических колебаний. Линейными называются электрические цепи, состоящие из элементов, параметры которых не зависят от приложенных к ним напряжений и протекающих токов. В таких цепях не происходит изменения частот подаваемых на них сигналов. С помощью линейных цепей решаются задачи преобразования уровней сигналов, формирования формы импульсов, выделения сигналов, лежащих в определенном частотном диапазоне на фоне помех.

Изучение преобразования электрических колебаний линейными цепями составляет определенный раздел радиотехники, более широкой практической задачей которой является использование электрических колебаний для передачи, хранения и преобразования информации. Традиционно к таким задачам относятся вопросы радиосвязи, т. е. передачи информации по радиоканалу с использованием электромагнитных волн.

Любая электрическая цепь или система связи подвержена воздействию на нее помех и шумов. Основными видами шумов являются тепловые шумы, возникающие из-за хаотического движения электронов в проводнике, дробовые шумы полупроводниковых приборов, вызванные пролетом носителей заряда через потенциальные барьеры, а также шумы приемных антенн, обусловленные излучением космоса, атмосферы и Земли. Эти шумы приводят к искажению полезных сигналов, передающих информацию. Поэтому одной из задач радиотехники является изучение и разработка методов снижения влияния шумов на полезный сигнал, что приводит к повышению дальности системы связи и достоверности передаваемой информации.

ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. Линейные электрические цепи и их характеристики

1.1. Основные определения

В теории цепей [1, 2] линейными называются электрические цепи, составленные из линейных идеализированных элементов — идеального резистора с сопротивлением R , идеального конденсатора с емкостью C , идеальной индуктивной катушки с индуктивностью L . Линейность этих элементов означает, что их параметры не зависят от протекающего тока и от приложенного напряжения. Связь мгновенных значений тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$ на зажимах этих элементов определяется следующими формулами.

Для идеального резистора эта связь подчиняется закону Ома:

$$u_R(t) = Ri_R(t) \text{ или } i_R(t) = \frac{1}{R}u_R(t). \quad (1.1)$$

Для идеального конденсатора:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t) dt \text{ или } i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (1.2)$$

Для идеальной катушки индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \text{ или } i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t) dt. \quad (1.3)$$

Кроме указанных элементов, в состав линейных цепей могут входить линейно управляемые источники, ток или напряжение которых линейно зависят от тока или напряжения некоторого участка цепи

(такими элементами могут замещаться транзисторы в области малых сигналов или операционные усилители). Например, источник тока, управляемый напряжением, для которого

$$i_{\text{вых}}(t) = S u_{\text{вх}}(t),$$

где $i_{\text{вых}}(t)$ — ток на выходе источника, S — коэффициент пропорциональности, называемый крутизной, $u_{\text{вх}}(t)$ — напряжение на входе. Или источник напряжения, управляемый напряжением, для него

$$u_{\text{вых}}(t) = \mu u_{\text{вх}}(t),$$

где $u_{\text{вых}}(t)$ — напряжение на выходе источника, μ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом усиления.

Если для таких цепей составить систему уравнений на основании законов Кирхгофа и записать ее либо относительно токов ветвей¹, либо относительно напряжений на элементах, используя соотношения (1.1)–(1.3), то эта система будет состоять из интегрально-дифференциальных уравнений. Решить такую систему можно путем сведения к одному дифференциальному уравнению, называемому *дифференциальным уравнением цепи*. Для линейной электрической цепи дифференциальное уравнение имеет вид

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f[x(t)], \quad (1.4)$$

где a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 — коэффициенты, зависящие от параметров элементов; n — порядок цепи, равный количеству независимых индуктивностей и емкостей; $y = y(t)$ — искомая реакция цепи, т. е. ток $i(t)$ какой-либо ветви или напряжение $u(t)$ на каком-либо элементе; $f[x(t)]$ — функция, зависящая от воздействия, $x(t)$ — воздействие, т. е. ток или напряжение, подаваемые на вход цепи.

Решение дифференциального уравнения (1.4) ищется в виде суммы двух составляющих — свободной $y_{\text{св}}(t)$ и принужденной $y_{\text{пр}}(t)$,

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{пр}}(t). \quad (1.5)$$

Свободная составляющая $y_{\text{св}}(t)$ определяет *переходный процесс* в цепи, который возникает после *коммутации*, т. е. после подачи на цепь воздействия, изменения его параметров и т. п. Эта составляющая ищется как общее решение однородного дифференциального уравнения

¹ Ветвью называется участок цепи, вдоль которого протекает одинаковый ток, ветвь может состоять из одного или нескольких последовательно соединенных элементов.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0.$$

В цепях с потерями $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{св}}(t) = 0$, т. е. переходный процесс затухает с течением времени, теоретически он длится бесконечно долго, но на практике длительность переходного процесса принимают равной $(3 \dots 5)\tau_{\text{цепи}}$, где $\tau_{\text{цепи}}$ — постоянная времени цепи.

Принужденная составляющая $y_{\text{пр}}(t)$ определяет установившийся режим в цепи, т. е. режим, когда переходный процесс закончится. Она ищется как частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1.4).

1.2. Метод комплексных амплитуд

Метод комплексных амплитуд позволяет определить реакцию линейной электрической цепи на гармоническое воздействие в установившемся режиме. В основе метода лежит то, что если на цепь подается гармоническое воздействие

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (1.6)$$

с амплитудой X_m , частотой ω и начальной фазой φ_x , то ДУ (1.4) принимает вид

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = A_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.7)$$

т. е. в правой части стоит гармоническая функция с амплитудой A_m и начальной фазой φ . Из теории дифференциальных уравнений известно, что частное решение, т. е. принужденная составляющая, в этом случае ищется в виде

$$y_{\text{пр}}(t) = Y_m \cos(\omega t + \varphi_y). \quad (1.8)$$

Амплитуду Y_m и начальную фазу φ_y принужденной составляющей можно определить, подставив (1.8) в (1.7) и решив получившееся тригонометрическое уравнение. Однако непосредственное такое решение оказывается сложным.

В методе комплексных амплитуд каждой гармонической функции ставится в соответствие *комплексная амплитуда*, например,

$$\begin{aligned} a(t) &= A_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \dot{A}_m = A_m e^{j\varphi}, \\ y(t) &= Y_m \cos(\omega t + \varphi_y) \Leftrightarrow \dot{Y}_m = Y_m e^{j\varphi_y}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

здесь \dot{A}_m и \dot{Y}_m — комплексные амплитуды гармонических функций $a(t)$ и $y(t)$ соответственно, $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $e \approx 2,718$ — основание натурального логарифма. При этом сами функции связаны с их комплексными амплитудами соотношением

$$\begin{aligned} a(t) &= \operatorname{Re}\{\dot{A}_m e^{j\omega t}\}, \\ y(t) &= \operatorname{Re}\{\dot{Y}_m e^{j\omega t}\}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{Re}\{\}$ — реальная часть комплексного числа, $e^{j\omega t}$ — *оператор вращения*.

Если использовать такое представление гармонических функций при нахождении \dot{Y}_m и φ_y , то уравнение (1.7) при подстановке в него (1.8) заменится комплексным алгебраическим уравнением, что позволит существенно упростить решение. Подробный вывод на примере последовательной RLC -цепи можно найти в [1], при этом доказывалось, что комплексные амплитуды напряжения \dot{U}_m и тока \dot{I}_m на пассивном участке цепи связаны между собой *законом Ома в комплексной форме*

$$\dot{U}_m = Z\dot{I}_m \text{ или } \dot{I}_m = Y\dot{U}_m, \quad (1.10)$$

где Z — комплексное сопротивление, $Y = 1/Z$ — комплексная проводимость участка цепи.

Порядок решения задачи методом комплексных амплитуд может быть следующим:

1) составление комплексной схемы замещения цепи, т. е. замена всех токов $i(t)$ и напряжений $u(t)$ их комплексными амплитудами \dot{I}_m и \dot{U}_m аналогично формулам (1.9), а всех идеализированных пассивных элементов — их комплексными сопротивлениями (или проводимостями):

$$Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}, \quad Z_L = j\omega L; \quad (1.11)$$

2) составление уравнений электрического равновесия на основании законов Ома (1.10) и Кирхгофа в комплексной форме;

3) решение уравнений относительно комплексных амплитуд интересующих токов и напряжений;

4) переход к мгновенным значениям интересующих токов и напряжений (определение амплитуд и начальных фаз).

1.3. Принцип суперпозиции

Для ДУ вида (1.4) справедлива *теорема о суперпозиции*, которая формулируется следующим образом. Если правая часть уравнения (1.4) представляет собой линейную комбинацию нескольких функций

$$f(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i(t),$$

где α_i — вещественные коэффициенты, $f_i(t)$ — элементарные функции, и $y_i = y_i(t)$ — есть решение ДУ вида

$$a_n \frac{d^n y_i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_i}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_i}{dt} + a_0 y_i = f_i(t),$$

то полное решение ДУ (1.4) находится в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t).$$

Из теоремы о суперпозиции следует принцип суперпозиции (или принцип наложения). *Реакция $y(t)$ линейной электрической цепи на воздействие $x(t)$ в виде линейной комбинации элементарных воздействий $x_i(t)$ ищется в виде линейной комбинации реакций $y_i(t)$ на каждое элементарное воздействие в отдельности.* Т.е. если воздействие

$$x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t), \quad (1.12)$$

то реакция линейной электрической цепи

$$y(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t), \quad (1.13)$$

где $y_i(t)$ — реакция на $x_i(t)$, α_i — вещественные коэффициенты.

Принцип суперпозиции лежит в основе *временного* и *спектрального методов* анализа прохождения сигналов через линейные электрические цепи. Кроме того, он используется при анализе прохождения аддитивной смеси (суммы) сигнала и шума через линейные электрические цепи.

С принципом суперпозиции тесно связан метод анализа электрических цепей, называемый *методом наложения*. Суть метода состоит в следующем. Если в цепи имеется несколько независимых источников энергии, то ток или напряжение какой-либо ветви ли-

нейной электрической цепи можно найти в виде суммы частичных токов или напряжений, вызванных действием каждого источника в отдельности.

1.4. Частотные характеристики цепей

Как будет показано ниже, знание характеристик цепи позволяет значительно упростить задачу определения реакции линейной электрической цепи на сложное воздействие.

Комплексной частотной характеристикой $H(j\omega)$ цепи называется отношение комплексной амплитуды реакции \dot{Y}_m к комплексной амплитуде воздействия \dot{X}_m ,

$$H(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m}. \quad (1.14)$$

Для четырехполюсной цепи (рис. 1.1), в зависимости от того, что рассматривать в качестве реакции, а что в качестве воздействия, можно записать две *входные* и четыре *передаточные* комплексные частотные характеристики.

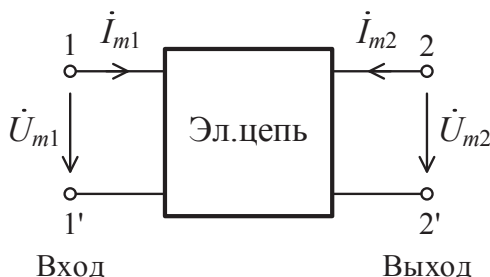


Рис. 1.1. Представление электрической цепи в виде четырехполюсника

Комплексное входное сопротивление

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_{m1}}.$$

Комплексная входная проводимость

$$Y_{11}(j\omega) = \frac{\dot{I}_{m1}}{\dot{U}_{m1}}.$$

Комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}.$$

Комплексный коэффициент передачи по току

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{I}_{m1}}.$$

Комплексное передаточное сопротивление

$$Z_{21}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{I}_{m1}}.$$

Комплексная передаточная проводимость

$$Y_{21}(j\omega) = \frac{\dot{I}_{m2}}{\dot{U}_{m1}}.$$

Здесь \dot{U}_{m1} и \dot{I}_{m1} — комплексные амплитуды напряжения и тока на входных зажимах 1–1', \dot{U}_{m2} и \dot{I}_{m2} — комплексные амплитуды напряжения и тока на выходных зажимах 2–2'.

Для определения комплексной частотной характеристики необходимо составить комплексную схему замещения цепи и, используя известные методы расчета (законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме, метод контурных токов, метод узловых напряжений), вывести функцию переменной $j\omega$, описывающую отношение реакции и воздействия.

Комплексная частотная характеристика линейной цепи не зависит от воздействия, а определяется топологией (т. е. структурой соединения элементов) цепи и параметрами элементов и может быть записана в виде дробно-рациональной функции

$$H(j\omega) = \frac{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}, \quad (1.15)$$

где $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0, b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, b_0$ — коэффициенты, зависящие от параметров элементов; m — целое число, $m \leq n$; n — порядок цепи, равный количеству независимых индуктивностей и емкостей.

Комплексная частотная характеристика представляет собой комплексное число и может быть записана в показательной форме

$$H(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где функция $H(\omega) = |H(j\omega)|$ называется *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)* цепи, а функция $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ называется *фазо-частотной характеристикой (ФЧХ)*. Можно показать, что

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} \right| = \left| \frac{Y_m e^{j\varphi_y}}{X_m e^{j\varphi_x}} \right| = \left| \frac{Y_m}{X_m} e^{j(\varphi_y - \varphi_x)} \right| = \frac{Y_m}{X_m},$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \arg \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \varphi_y - \varphi_x.$$

То есть значение АЧХ $H(\omega)$ равно отношению амплитуд реакции Y_m и воздействия X_m на частоте ω , а значение ФЧХ $\varphi(\omega)$ равно разности начальных фаз реакции φ_y и воздействия φ_x на частоте ω .

Знание комплексной частотной характеристики важно тем, что позволяет достаточно просто определить реакцию линейной электрической цепи на сложное воздействие $x(t)$, представляющее собой сумму нескольких гармонических колебаний с амплитудами X_{mi} , частотами ω_i и начальными фазами φ_{xi} ,

$$x(t) = \sum_{i=1}^N X_{mi} \cos(\omega_i t + \varphi_{xi}). \quad (1.16)$$

В этом случае в соответствии с принципом суперпозиции в установленном режиме реакция линейной электрической цепи

$$y(t) = \sum_{i=1}^N Y_{mi} \cos(\omega_i t + \varphi_{yi}).$$

При этом амплитуды Y_{mi} и начальные фазы φ_{yi} гармонических составляющих реакции $y(t)$ связаны с амплитудами X_{mi} и начальными фазами φ_{xi} воздействия $x(t)$ соотношениями

$$Y_{mi} = X_{mi} H(\omega_i) \quad \text{и} \quad \varphi_{yi} = \varphi_{xi} + \varphi(\omega_i),$$

где $H(\omega_i)$ и $\varphi(\omega_i)$ — значения АЧХ и ФЧХ на частоте ω_i соответственно. То есть если известны АЧХ и ФЧХ, то реакцию линейной электрической цепи $y(t)$ на воздействие $x(t)$ в виде суммы гармонических составляющих (1.16) можно определить следующим образом:

$$y(t) = \sum_{i=1}^N X_{mi} H(\omega_i) \cos[\omega_i t + \varphi_{xi} + \varphi(\omega_i)].$$

1.5. Временные характеристики цепей

Пусть на цепь начиная с момента времени $t = 0$ подается произвольное воздействие. Например, в момент времени $t = 0$ воздействие $x(t)$ скачком изменяется от 0 до X_0 (рис. 1.2). Определить реакцию $y(t)$ в этом случае можно, составив и решив ДУ (1.4) для $t \geq 0$, при этом реакцию необходимо искать в соответствии с формулой (1.5). Такой метод, основанный на составлении и решении ДУ, называется *классическим методом анализа переходных процессов* [1, 2].

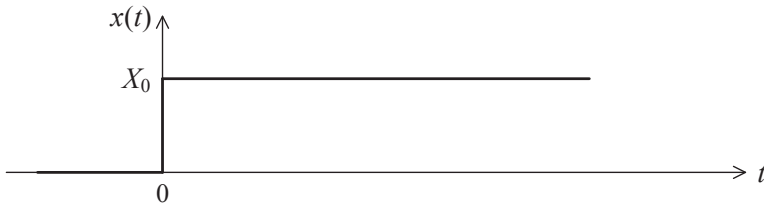


Рис. 1.2. Скачкообразное изменение воздействия при $t = 0$

Пусть теперь на цепь начиная с момента времени $t = 0$ подается последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1.3) длительностью $\tau_{\text{и}}$ с периодом повторения T . Если воспользоваться описанной выше методикой, то для определения реакции $y(t)$ придется многократно решать задачу классическим методом для моментов времени $t = 0$, $t = \tau_{\text{и}}$, $t = T$ и т.д. Знание временных характеристик цепи в этом случае позволит значительно упростить поиск реакции $y(t)$.

К временным характеристикам относятся *переходная* и *импульсная* характеристики, которые определяются в виде реакции на тестовое воздействие при нулевом начальном запасе энергии в цепи.

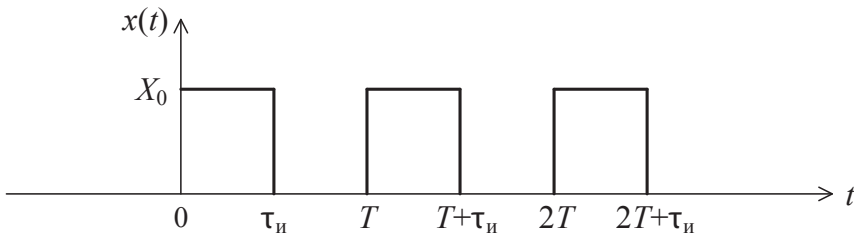


Рис. 1.3. Последовательность прямоугольных импульсов при $t \geq 0$

Переходной характеристикой $H(t)$ линейной электрической цепи называется реакция на воздействие в виде функции включения (функции Хевисайда) $1(t)$ при нулевых начальных условиях², т. е.

$$H(t) = y(t) \Big|_{x(t)=1(t), \text{ Н.У. } = 0} \quad (1.17)$$

Импульсной характеристикой $h(t)$ линейной электрической цепи называется реакция на воздействие в виде дельта-функции (функции Дирака) $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях, т. е.

$$h(t) = y(t) \Big|_{x(t)=\delta(t), \text{ Н.У. } = 0} \quad (1.18)$$

Импульсная и переходная характеристики обладают свойством: $H(t) = 0$ и $h(t) = 0$ при $t < 0$, т. к. реакция не может появиться раньше воздействия.

В свою очередь функция включения $1(t)$ и дельта-функция $\delta(t)$ определяются формулами

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad \text{при этом} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.20)$$

Их графики показаны на рис. 1.4.

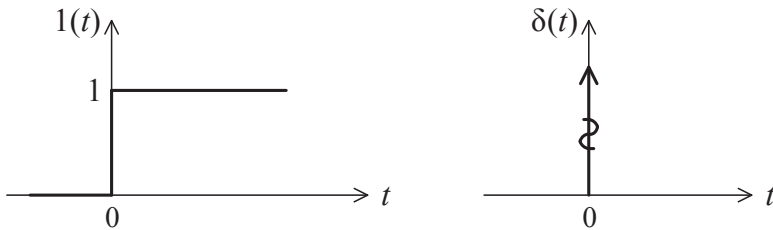


Рис. 1.4. Графики функции включения и дельта-функции

Расчет временных характеристик обычно выполняется с использованием операторной характеристики цепи $H(p)$, с которой они связаны через преобразование Лапласа следующими соотношениями:

$$H(t) = L^{-1} \left\{ \frac{H(p)}{p} \right\} \quad \text{и} \quad h(t) = L^{-1} \{ H(p) \}, \quad (1.21)$$

² Начальные условия представляют собой напряжения на емкостях U_C и токи в индуктивностях I_L в момент времени $t = 0$.

где L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа. Кроме этого, определив сначала одну характеристику, можно определить другую, воспользовавшись их связью во временной области,

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt \text{ и } h(t) = H(0)\delta(t) + \frac{d}{dt} H(t), \quad (1.22)$$

здесь $H(0)$ — значение $H(t)$ при $t = 0$. Если $H(0) = 0$, то $h(t) = \frac{d}{dt} H(t)$.

Если теперь вернуться к последовательности прямоугольных импульсов (см. рис. 1.3), то, используя функцию включения $1(t)$, такое воздействие можно записать следующим образом:

$$x(t) = X_0 1(t) - X_0 1(t - \tau_{\text{и}}) + X_0 1(t - T) - X_0 1[t - (T + \tau_{\text{и}})] + \dots$$

Тогда, используя принцип суперпозиции (1.12), (1.13) и определение переходной характеристики $H(t)$ (1.17), можно показать, что реакция

$$y(t) = X_0 H(t) - X_0 H(t - \tau_{\text{и}}) + X_0 H(t - T) - X_0 H[t - (T + \tau_{\text{и}})] + \dots$$

1.6. Операторные характеристики цепей

Операторной характеристикой $H(p)$ линейной электрической цепи называется отношение изображений по Лапласу реакции $Y(p)$ и воздействия $X(p)$ при нулевых начальных условиях

$$H(p) = \left. \frac{Y(p)}{X(p)} \right|_{\text{н.у.} = 0}.$$

Для четырехполюсной цепи можно записать две входные и четыре передаточные операторные характеристики, аналогичные комплексным частотным характеристикам (см. параграф 1.4). При этом, так же как и комплексная частотная характеристика, операторная характеристика линейной цепи определяется только топологией цепи и параметрами элементов, может быть записана в виде дробно-рациональной функции (1.15) переменной p и связана с комплексной частотной характеристикой $H(j\omega)$ соотношением

$$H(j\omega) = H(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

Чтобы рассчитать операторную характеристику, необходимо:

1) составить операторную схему замещения цепи при нулевых начальных условиях, т. е. заменить все токи $i(t)$ и напряжения $u(t)$ их изо-

бражениями по Лапласу $I(p)$ и $U(p)$, а все идеализированные пассивные элементы — их операторными сопротивлениями $Z(p)$ или проводимостями $Y(p) = 1/Z(p)$,

$$Z_R(p) = R, \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}, \quad Z_L(p) = pL; \quad (1.23)$$

2) используя известные методы расчета, аналогичные методам расчета комплексных схем замещения (законы Ома — $U(p) = Z(p)I(p)$ и Кирхгофа в операторной форме, метод контурных токов, метод узловых напряжений), вывести функцию $H(p)$, описывающую отношение изображения реакции к изображению воздействия.

1.7. Временной метод

Временной метод позволяет определить реакцию $y(t)$ линейной цепи на произвольное воздействие $x(t)$, заданное при $t \geq 0$, используя ее переходную или импульсную характеристику (см. параграф 1.5).

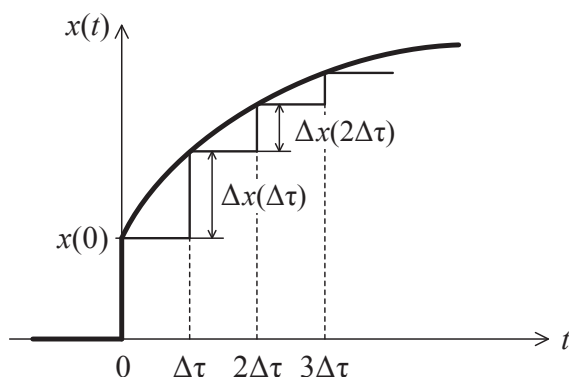


Рис. 1.5. Представление воздействия в виде ступенчатой функции

Пусть на цепь начиная с момента времени $t = 0$ подается произвольное воздействие $x(t)$, показанное на рис. 1.5. Разделим ось времени на равные интервалы $\Delta\tau$ и представим воздействие в виде ступенчатой функции (рис. 1.5)

$$\tilde{x}(t) = x(0)1(t) + \sum_k \Delta x(k\Delta\tau)1(t - k\Delta\tau), \quad (1.24)$$

где $x(0)$ — значение воздействия $x(t)$ при $t = 0$, $1(t)$ — функция включения, см. (1.19) и рис. 1.4, $\Delta x(k\Delta\tau)$ — приращение воздействия в точках $t = k\Delta\tau$; при этом $x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \tilde{x}(t)$.

В соответствии с принципом суперпозиции (1.12), (1.13) и определением переходной характеристики $H(t)$ (1.17) реакция на ступенчатую функцию (1.24) запишется следующим образом:

$$\tilde{y}(t) = x(0)H(t) + \sum_k \Delta x(k\Delta\tau)H(t - k\Delta\tau).$$

Умножим и разделим выражение под знаком суммы на $\Delta\tau$, тогда

$$\tilde{y}(t) = x(0)H(t) + \sum_k \frac{\Delta x(k\Delta\tau)}{\Delta\tau} H(t - k\Delta\tau)\Delta\tau. \quad (1.25)$$

Чтобы определить реакцию цепи $y(t)$ на воздействие $x(t)$, необходимо в выражении (1.25) устремить $\Delta\tau$ к нулю, т. е. $y(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \tilde{y}(t)$, тогда

$$y(t) = x(0)H(t) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} H(t - \tau)d\tau. \quad (1.26)$$

Полученная формула, позволяющая определить реакцию $y(t)$ линейной электрической цепи на произвольное воздействие $x(t)$ по ее переходной характеристике $H(t)$, называется *интегралом наложения*, или *интегралом Дюамеля*.

Если представить воздействие $x(t)$ в виде примыкающих друг к другу прямоугольных импульсов (рис. 1.6) шириной $\Delta\tau$ и высотой $x(k\Delta\tau)$ и устремить однократно длительность интервала $\Delta\tau$ к нулю, то воздействие запишется в виде совокупности дельта-функций $\delta(t)$, см. (1.20) и рис. 1.4, площадью $x(k\Delta\tau)\Delta\tau$, следующих с интервалом $\Delta\tau$,

$$\tilde{x}(t) = \sum_k x(k\Delta\tau)\delta(t - k\Delta\tau)\Delta\tau.$$

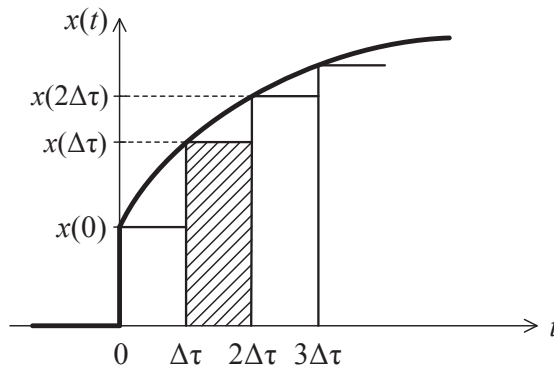


Рис. 1.6. Представление воздействия в виде примыкающих прямоугольных импульсов

Реакцией на такую последовательность в соответствии с принципом суперпозиции будет совокупность импульсных характеристик $h(t)$,

$$\tilde{y}(t) = \sum_k x(k\Delta\tau)h(t - k\Delta\tau)\Delta\tau.$$

Устремляя повторно длительность интервала $\Delta\tau$ к нулю, получим реакцию цепи

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (1.27)$$

Данная формула, позволяющая определить реакцию $y(t)$ линейной электрической цепи на произвольное воздействие $x(t)$ по ее импульсной характеристике $h(t)$, называется *интегралом свертки*.

2. Основы теории детерминированных сигналов

2.1 Основные определения

Сигналом называется процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений [3].

Математической моделью сигнала может быть функция времени, например $s(t)$, $x(t)$, $y(t)$. Типичными для радиотехники сигналами являются ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$. В теории сигналов [3, 4], с учетом определенных классификационных признаков, выделяют следующие разновидности сигналов.

Детерминированные сигналы — это сигналы, математическая модель которых позволяет определить их точное значение в любой момент времени. Примерами детерминированных сигналов являются гармоническая функция (1.6) с известными параметрами — амплитудой X_m , частотой ω и начальной фазой φ_x или последовательность прямоугольных импульсов (см. рис. 1.3) с заданными амплитудой X_0 , длительностью τ_n и периодом повторения T .

Случайные сигналы — это сигналы, значения которых в любой момент времени точно не известны, их можно определить только с некоторой вероятностью, меньшей единицы. К таким сигналам в радиотехнике прежде всего относятся различные шумы и помехи. Кроме того,

в теории информации к случайным сигналам относят различные сообщения, значения которых заранее неизвестны (речевое сообщение, музыка, неповторяющийся текст).

Импульсные сигналы — это сигналы, существующие в пределах конечного отрезка времени, т. е. $s(t) \neq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$, где t_1 и t_2 — границы некоторого отрезка времени. Например, на рис. 1.3 показан импульсный сигнал в виде пачки из трех импульсов, существующих в пределах $0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}$, с периодом повторения T .

Аналоговые сигналы — это сигналы, полностью аналогичные порождающему их физическому процессу. Они задаются на оси времени в несчетном множестве точек, их математической моделью может быть функция времени $s(t)$, $x(t)$, $y(t)$ и т. п. как непрерывная, например (1.6), так и имеющая точки разрыва (см. рис. 1.3).

Дискретные сигналы — это сигналы, математическая модель которых задана в виде множества значений сигнала, определенных в счетном множестве точек на оси времени — $\{s(k\Delta t)\}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, Δt — шаг дискретизации.

Цифровые сигналы — это дискретные сигналы, значения которых квантованы по уровню, т. е. представлены числами с ограниченным количеством разрядов (как правило, в двоичной форме).

Для сравнения различных сигналов необходимо определить их числовые характеристики. Наиболее важными являются энергетические характеристики, в теории цепей определяющие энергию, выделяемую или запасаемую в цепи, а в радиотехнике определяющие дальность действия системы связи.

Энергия сигнала E_s — это положительное число, рассчитываемое по формуле

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (1.28)$$

Физический смысл данной формулы — такая энергия выделяется на идеальном резисторе сопротивлением $R = 1$ Ом при протекании через него тока $i(t) = s(t)$ или при приложении напряжения $u(t) = s(t)$.

Средняя мощность сигнала $P_{\text{ср}}$ рассчитывается путем усреднения по времени квадрата сигнала на достаточно большом промежутке времени.

$$P_{\text{ср}} = \langle s^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt. \quad (1.29)$$

Физический смысл — это активная мощность, выделяемая на идеальном резисторе сопротивлением $R = 1$ Ом при протекании тока $i(t) = s(t)$ или при приложении напряжения $u(t) = s(t)$.

Эффективное (среднеквадратическое³) значение сигнала рассчитывается как корень квадратный из среднего квадрата, вычисленного усреднением по времени на большом промежутке

$$S_{\text{эфф}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}.$$

Таким образом, эффективное значение определяет среднюю мощность сигнала. Если рассматривать периодический детерминированный сигнал и выполнять усреднение на промежутке времени T , равном периоду, то данная формула совпадет с формулой для действующего значения периодической функции [2].

2.2. Спектральный анализ сигналов

Спектральным разложением сигнала (в гармоническом базисе) называется его представление в виде суммы гармонических колебаний с различными частотами. Например, формула (1.16) представляет собой спектральное разложение некоторого сигнала $x(t)$.

2.2.1. Спектральный анализ периодических сигналов

Периодическим сигналом называется сигнал, значения которого повторяются через равные промежутки T на всей оси времени t (рис. 1.7). Для математической модели периодического сигнала выполняется условие:

$$s(t) = s(t \pm nT),$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$; T — период повторения сигнала.

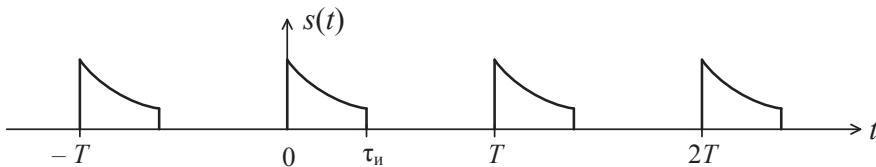


Рис. 1.7. Периодический импульсный сигнал

³ В англоязычной литературе и измерительных приборах используется аббревиатура RMS (root mean square).

Тригонометрический ряд Фурье

Как известно из математики, произвольная периодическая функция $s(t)$, удовлетворяющая условию Дирихле, т. е. на отрезке времени, равном периоду T , имеющая конечное число экстремумов и конечное число разрывов первого рода, может быть представлена *тригонометрическим рядом Фурье*

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t). \quad (1.30)$$

Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье a_0, a_n, b_n в общем случае рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\omega_1 t dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\omega_1 t dt, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где ω_1 — основная частота последовательности или частота первой гармоники, $\omega_1 = 2\pi / T$.

Выражение (1.30) для тригонометрического ряда Фурье можно записать в другой форме

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n). \quad (1.32)$$

При этом

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ и } \varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}.$$

В свою очередь

$$a_n = A_n \cos \varphi_n \text{ и } b_n = A_n \sin \varphi_n. \quad (1.33)$$

Таким образом, периодический сигнал $s(t)$ может быть представлен в виде бесконечной суммы постоянной составляющей $a_0/2$ и гармонических составляющих, называемых *гармониками*, с амплитудами A_n , начальными фазами $(-\varphi_n)$ и частотами $n\omega_1$, кратными основной частоте

те. Совокупность коэффициентов $\left\{\frac{a_0}{2}, A_n\right\}$ образует *дискретный амплитудный спектр* (амплитудную спектральную диаграмму) периодического сигнала $s(t)$ на положительной полуоси частот $\omega \geq 0$, а совокупность коэффициентов $\{\varphi_n\}$ — *дискретный фазовый спектр* (фазовую спектральную диаграмму) также на положительной полуоси частот. Тригонометрический ряд Фурье (1.32) является физической моделью сигнала, т. к., просуммировав гармонические составляющие с частотами $n\omega_1$ с соответствующими амплитудами A_n и начальными фазами $(-\varphi_n)$, можно сформировать сигнал $s(t)$.

Комплексная форма ряда Фурье

Представление периодического сигнала в виде суммы элементарных составляющих основано на его разложении в обобщенный ряд Фурье по ортонормированному базису [3]:

$$s(t) = \sum_k c_k u_k(t),$$

где c_k — коэффициенты, $u_k(t)$ — базисные функции,

$$c_k = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) u_k^*(t) dt,$$

где $u_k^*(t)$ — комплексно-сопряженная базисная функция.

Тригонометрическая форма ряда Фурье (1.30) получается при использовании базиса в виде бесконечного набора гармонических функций, дополненного постоянной составляющей — $\frac{1}{\sqrt{T}}$, $\sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$,

$$\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(m \frac{2\pi}{T} t\right), \text{ где } n, m = 1, 2, 3, \dots$$

Комплексная форма ряда Фурье получится, если использовать в качестве базиса систему комплексных функций $u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\omega_1 t}$, $n = 0$,

$\pm 1, \pm 2, \dots$ В этом случае разложение сигнала запишется следующим образом:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (1.34)$$

Коэффициенты \dot{C}_n комплексного ряда Фурье находятся по формуле

$$\dot{C}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.35)$$

Используя формулу Эйлера $e^{jx} = \cos x + j \sin x$, формулы (1.31), (1.33) и переходя от тригонометрической формы записи комплексного числа к показательной, можно показать, что

$$\dot{C}_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2} e^{-j\varphi_n}.$$

Т.е. коэффициент \dot{C}_n , уменьшенный по модулю в два раза, есть комплексная амплитуда n -й гармонической составляющей в формуле (1.32). Совокупность модулей коэффициентов $\{|\dot{C}_n|\}$ образует дискретный амплитудный спектр периодического сигнала $s(t)$ на всей оси частот $\omega \in (-\infty, \infty)$, а совокупность аргументов $\{\arg \dot{C}_n\}$ — дискретный фазовый спектр также на всей оси частот. Пример графиков дискретных амплитудного и фазового спектров показан на рис. 1.8.

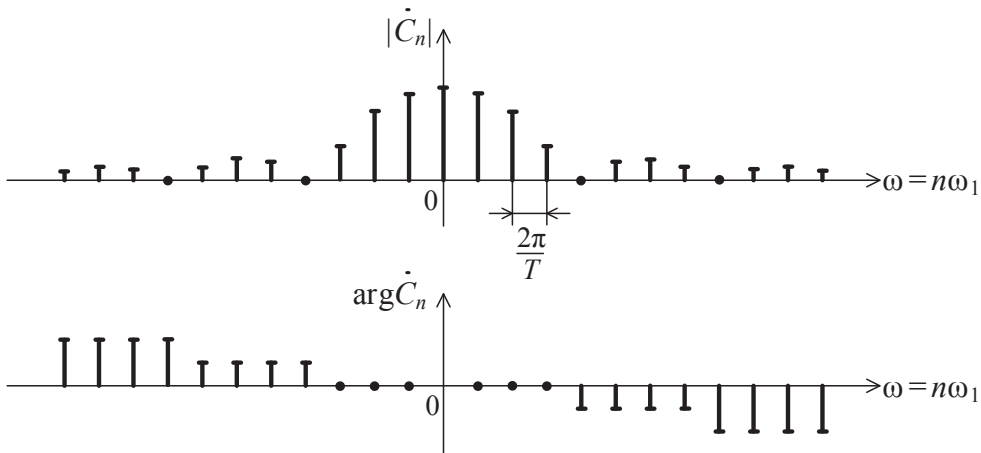


Рис. 1.8. Пример амплитудного и фазового спектров периодического сигнала

При этом амплитудный спектр обладает свойством четности, $|\dot{C}_{-n}| = |\dot{C}_n|$, а фазовый — нечетности, $\arg \dot{C}_{-n} = -\arg \dot{C}_n$.

Можно показать, что составляющие в формуле (1.34) с одинаковыми номерами, лежащие на отрицательной и на положительной полуосях ω , объединяются в пары:

$$\dot{C}_{-n}e^{-jn\omega_1 t} + \dot{C}_n e^{jn\omega_1 t} = \frac{A_n}{2}e^{-j(n\omega_1 t - \varphi_n)} + \frac{A_n}{2}e^{j(n\omega_1 t - \varphi_n)} = A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n).$$

Таким образом, комплексная форма (1.34) является другой формой записи тригонометрического ряда Фурье (1.32), однако она не является физической моделью сигнала, а используется только для его математического описания.

2.2.2. Спектральный анализ непериодических сигналов

Одиночный импульсный сигнал конечной длительности, например сигнал $s(t)$, показанный на рис. 1.9, можно рассматривать как периодический (см. рис. 1.7), если устремить период T к бесконечности. При этом дискретные амплитудный и фазовый спектры (см. рис. 1.8) превратятся в непрерывные, т. к. при $T \rightarrow \infty$ частотный интервал между соседними спектральными составляющими $\Delta\omega = 2\pi/T$ устремится к нулю.

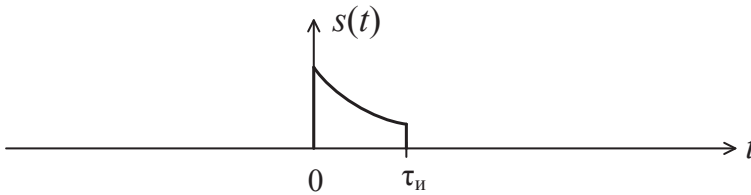


Рис. 1.9. Одиночный импульсный сигнал

Если выполнить разложение сигнала в комплексный ряд Фурье и устремить период к бесконечности, $T \rightarrow \infty$, применив при этом определенные математические преобразования, то формула (1.35) заменится следующей формулой:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1.36)$$

Функция $S(\omega)$ называется *спектральной плотностью непериодического сигнала $s(t)$* , а интегральное преобразование (1.36) называется *прямым преобразованием Фурье*. Условием существования спектраль-

ной плотности является абсолютная интегрируемость сигнала в бесконечных пределах:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Спектральная плотность — это комплексная функция, которая может быть записана в показательной форме $S(\omega) = |S(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$. Модуль $|S(\omega)|$ называется *амплитудным спектром* непериодического сигнала, а аргумент $\varphi(\omega) = \arg S(\omega)$ — *фазовым спектром*. При этом амплитудный спектр обладает свойством четности, т. е. $|S(-\omega)| = |S(\omega)|$, а фазовый — нечетности, т. е. $\arg S(-\omega) = -\arg S(\omega)$. Пример спектров непериодического сигнала показан на рис. 1.10.

Сравнивая между собой формулы (1.36) и (1.35), можно заметить, что непрерывная спектральная плотность $S(\omega)$, деленная на период повторения T , является огибающей для дискретных коэффициентов комплексного ряда Фурье, $\dot{C}_n = \frac{1}{T} S(n\omega_1)$.

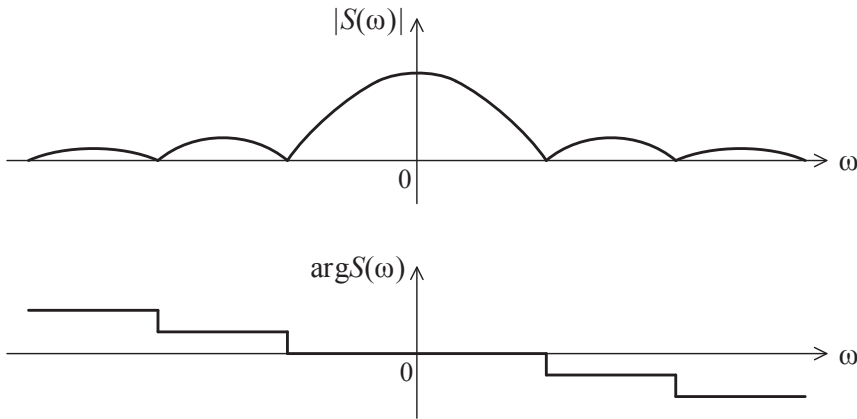


Рис. 1.10. Пример амплитудного и фазового спектров непериодического сигнала

Формула (1.34) разложения сигнала в комплексный ряд Фурье при $T \rightarrow \infty$ преобразуется к виду

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.37)$$

Такое интегральное преобразование называется *обратным преобразованием Фурье*. Если учесть, что ядро преобразования Фурье $e^{j\omega t}$ является оператором вращения, описывающим гармоническую функцию на комплексной плоскости (см. параграф 1.2), то можно сформулировать смысл формулы обратного преобразования Фурье. Согласно (1.37) сигнал $s(t)$ представляет собой бесконечную сумму гармонических составляющих с бесконечно малыми комплексными амплитудами $\frac{1}{2\pi} S(\omega) d\omega$, бесконечно близко расположенных друг к другу во всем диапазоне частот $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Таким образом, спектральная плотность $S(\omega)$ характеризует распределение комплексных амплитуд гармонических составляющих сигнала $s(t)$ во всем непрерывном диапазоне частот $-\infty < \omega < \infty$.

2.3. Спектральный метод

Спектральный метод позволяет определить реакцию линейной электрической цепи на произвольное внешнее воздействие, используя соотношение их спектральных плотностей и зная комплексную частотную характеристику цепи (см. параграф 1.4).

Пусть на линейную электрическую цепь подается воздействие $x(t)$, для которого существует спектральная плотность $S_x(\omega)$. Согласно формуле обратного преобразования Фурье (1.37)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.38)$$

Т.е. воздействие $x(t)$ представляет собой бесконечную сумму гармонических составляющих с комплексными амплитудами $\dot{X}_m = (1/2\pi) S_x(\omega) d\omega$. Тогда комплексная амплитуда соответствующей гармонической составляющей реакции $\dot{Y}_m = (1/2\pi) S_x(\omega) H(j\omega) d\omega$, где $H(j\omega)$ — комплексная частотная характеристика цепи (1.14).

Чтобы определить полную реакцию линейной цепи на воздействие (1.38), необходимо воспользоваться принципом суперпозиции (1.12), (1.13) и просуммировать гармонические составляющие реакции, в итоге получится:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Если сравнить полученное выражение с формулой обратного преобразования Фурье (1.37), то можно увидеть, что произведение $S_x(\omega)H(j\omega)$ представляет собой спектральную плотность $S_y(\omega)$ реакции цепи $y(t)$. Таким образом, согласно спектральному методу

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)H(j\omega). \quad (1.39)$$

То есть *спектральная плотность реакции $S_y(\omega)$ линейной электрической цепи равна произведению спектральной плотности воздействия $S_x(\omega)$ на комплексную частотную характеристику цепи $H(j\omega)$.*

2.4. Связь временного и спектрального методов

По определению (1.18), импульсная характеристика $h(t)$ линейной электрической цепи представляет собой реакцию на воздействие в виде дельта-функции. В частотной области, согласно спектральному методу (1.39), такому определению будет соответствовать равенство $S_h(\omega) = S_\delta(\omega)H(j\omega)$, где $S_h(\omega)$ — спектральная плотность импульсной характеристики, $S_\delta(\omega)$ — спектральная плотность дельта-функции, $H(j\omega)$ — комплексная частотная характеристика цепи. Если воспользоваться формулами (1.36) и (1.20), то можно вычислить, что $S_\delta(\omega) = 1$, таким образом, $S_h(\omega) = H(j\omega)$. Т.е. *спектральная плотность импульсной характеристики равна комплексной частотной характеристике цепи.* Воспользовавшись (1.36), можно записать:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1.40)$$

В свою очередь, импульсная характеристика цепи $h(t)$ связана с комплексной частотной характеристикой $H(j\omega)$ обратным преобразованием Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Так как, согласно свойствам преобразования Фурье, свертке функций во временной области соответствует произведение их спектральных плотностей, формуле (1.39) будет соответствовать интеграл

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (1.41)$$

где $y(t)$ — реакция цепи, $x(t)$ — воздействие, $h(t)$ — импульсная характеристика, τ — переменная интегрирования. Для $x(\tau) = 0$ при $\tau < 0$,

а также с учетом свойства импульсной характеристики $h(t-\tau) = 0$ при $t-\tau < 0$, получаем полную эквивалентность с временным методом, т. е. с формулой интеграла свертки (1.27).

2.5. Условие неискаженного прохождения сигнала

Неискаженное прохождение сигнала предполагает неизменность формы сигнала при прохождении его через электрическую цепь. Во временной области условие неискаженного прохождения сигнала можно записать следующим образом:

$$y(t) = kx(t - t_3), \quad (1.42)$$

где $y(t)$ — реакция цепи, $x(t)$ — воздействие, k — постоянный вещественный коэффициент, t_3 — время задержки.

Пусть $S_x(\omega)$ и $S_y(\omega)$ — спектральные плотности воздействия $x(t)$ и реакции $y(t)$ соответственно. Если теперь воспользоваться свойствами преобразования Фурье — линейности и задержки во времени [3], то равенству (1.42) в частотной области будет соответствовать формула

$$S_y(\omega) = kS_x(\omega)e^{-j\omega t_3}.$$

Сравнивая данную формулу с (1.39), можно сделать вывод, что комплексная частотная характеристика цепи должна быть равна

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_3}. \quad (1.43)$$

То есть для неискаженного прохождения сигнала через цепь ее АЧХ должна иметь постоянное значение $H(\omega) = |H(j\omega)| = k$, а ФЧХ должна быть линейной, $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\omega t_3$, во всем диапазоне частот, занимаемом входным сигналом (воздействием) $x(t)$.

2.6. Энергетический спектр сигнала

Энергетическим спектром сигнала $s(t)$ называется квадрат модуля его спектральной плотности $|S(\omega)|^2$. Данная функция позволяет вычислить энергию сигнала в частотной области:

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.44)$$

То есть функция $|S(\omega)|^2$ характеризует распределение энергии сигнала по частоте. Энергетический спектр обладает свойством четности,

$|S(-\omega)|^2 = |S(\omega)|^2$, поэтому на практике при изучении свойств сигнала по его энергетическому спектру обычно рассматривают только положительную полуось частот $\omega \geq 0$.

Также необходимо отметить, что сигналы одинаковой формы, различающиеся своим положением на оси времени, будут иметь одинаковый энергетический спектр.

2.7. Корреляционный анализ сигналов

В некоторых задачах радиотехники, например в радиолокации, возникает необходимость сравнить сигналы, различающиеся по своему положению на оси времени. Для количественной оценки степени отличия сигнала и его смещенной во времени копии вводят автокорреляционную функцию (АКФ), которая рассчитывается по формуле

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt, \quad (1.45)$$

где τ — величина смещения копии сигнала по оси времени.

АКФ сигнала обладает следующими свойствами: это четная функция, $B_s(-\tau) = B_s(\tau)$, которая в нуле принимает максимальное значение, равное энергии сигнала, т. е. $|B_s(\tau)| \leq B_s(0) = E_s$. Кроме этого, АКФ связана с энергетическим спектром сигнала преобразованием Фурье:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$|S(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Для оценки степени отличия двух разных сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, смещенных по оси времени, используют *взаимную корреляционную функцию* (ВКФ), которая рассчитывается по формуле

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau)dt. \quad (1.46)$$

Свойства ВКФ несколько отличаются от свойств АКФ, например $B_{12}(-\tau) = B_{21}(\tau)$, т. е. ВКФ не является четной функцией.

3. Основы теории случайных сигналов

3.1. Основные определения

Как уже было сказано выше, в параграфе 2.1, *случайные сигналы* — это сигналы, значения которых в любой момент времени точно не известны. К таким сигналам в радиотехнике относятся различные шумы и помехи, которые представляют собой *флуктуации* — случайные отклонения напряжения или тока от среднего значения. Например, флуктуации напряжения можно наблюдать на зажимах резистора из-за теплового движения электронов, которое носит случайный характер. Располагая вероятностью этих отклонений, можно составить математическую модель такого сигнала.

3.1.1. Случайные процессы

Случайный процесс $X(t)$ представляет собой *статистический ансамбль* (бесконечное множество) функций $\{x_i(t)\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, называемых *реализациями*, каждая из которых в любой момент времени принимает случайные значения.

Например, если наблюдать напряжение тепловых шумов на зажимах одного резистора в течение определенного промежутка времени, получится одна реализация случайного процесса. Если взять несколько резисторов с одинаковым сопротивлением R , изготовленных по одинаковой технологии, и наблюдать шумовое напряжение на их зажимах, получится ансамбль реализаций. На рис. 1.11 показаны реализации случайного процесса.

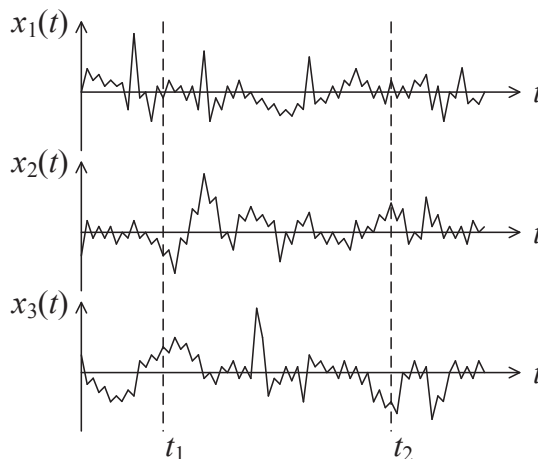


Рис. 1.11. Реализации случайного процесса

Зафиксировав момент времени, например $t = t_1$ (см. рис. 1.11), получим *сечение* случайного процесса, в котором будем наблюдать случайную величину $X(t_1)$, принимающую значения $\{x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1), \dots\}$. Этой случайной величине соответствует одномерная плотность вероятности $p(x, t_1)$.

Выполнив второе сечение случайного процесса при $t = t_2$ (см. рис. 1.11), получим двумерную случайную величину $\{X(t_1), X(t_2)\}$, которой будет соответствовать двумерная плотность вероятности $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$.

3.1.2. Моментные функции

Случайный процесс можно характеризовать *моментами*, или *моментными функциями*, которые *вычисляются путем статистического усреднения по ансамблю реализаций* в соответствии с определениями теории вероятностей [5].

Математическое ожидание имеет смысл среднего значения случайной величины, наблюдаемой в ансамбле реализаций в момент времени t , вычисляется по формуле

$$m(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx.$$

Дисперсия определяет степень разброса случайной величины, наблюдаемой в момент времени t относительно среднего значения, вычисляется по формуле

$$\sigma^2(t) = \overline{[x(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 p(x, t)dx.$$

Функция корреляции определяет степень статистической связи случайных величин, наблюдаемых в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \overline{[x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]p(x_1, x_2, t_1, t_2)dx_1dx_2. \end{aligned}$$

3.1.3. Стационарный случайный процесс

Стационарным называют случайный процесс, статистические характеристики которого одинаковы во всех сечениях [3].

Случайный процесс *стационарен в узком смысле*, если его многомерная плотность вероятности $p(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ не изменяется при сдвигах во времени на величину τ , т. е.

$$p(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) = p(x_1, \dots, x_n, t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau).$$

Случайный процесс *стационарен в широком смысле*, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции зависит только от разности моментов времени, т. е.

$$m(t) = m,$$

$$\sigma^2(t) = \sigma^2,$$

$$R(t_1, t_2) = R(\tau), \text{ где } \tau = t_2 - t_1.$$

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но обратное утверждение в общем случае неверно.

Функция корреляции стационарного случайного процесса обладает свойством четности, $R(-\tau) = R(\tau)$, и в нуле принимает максимальное значение, равное дисперсии, т. е. $|R(\tau)| \leq R(0) = \sigma^2$.

3.1.4. Эргодический случайный процесс

Стационарный случайный процесс называется эргодическим, если при вычислении его моментных функций усреднение по ансамблю можно заменить усреднением по времени для одной единственной реализации $x(t)$, т. е.

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt.$$

Таким образом, математическое ожидание эргодического случайного процесса равно постоянной составляющей реализации.

$$\sigma^2 = \langle [x(t) - m]^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m]^2 dt.$$

Сравнивая с (1.29), можно увидеть, что дисперсия равна средней мощности флуктуационной составляющей реализации $x(t)$.

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \langle [x(t) - m][x(t + \tau) - m] \rangle = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle - m^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt - m^2. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Достаточным условием эргодичности случайного процесса является стремление к нулю его функции корреляции при увеличении временного сдвига, т. е. $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = 0$. Большинство случайных процессов, наблюдаемых в радиотехнике, являются эргодическими.

3.2. Характеристики случайных сигналов в частотной области

3.2.1. Случайный процесс в частотной области

В параграфе 2.2 для детерминированных сигналов $s(t)$ было введено определение спектральной плотности $S(\omega)$, см. (1.36). Случайный сигнал представляет собой случайный процесс, образованный ансамблем реализаций $\{x_i(t)\}$, при этом каждой реализации будет соответствовать своя спектральная плотность, $x_i(t) \Leftrightarrow S_{x_i}(\omega)$. Таким образом, случайный процесс во временной области порождает случайный процесс в частотной области,

$$\{x_i(t)\} \Leftrightarrow \{S_{x_i}(\omega)\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

В [3] выводятся свойства спектральных плотностей реализаций стационарного случайного процесса — равенство нулю среднего значения $\overline{S_x(\omega)} = 0$ (при этом среднее значение случайного процесса также равно нулю $\overline{m_x} = \overline{x(t)} = 0$) и дельта-коррелированность $\overline{S_x(\omega)S_x^*(\omega')} \sim \delta(\omega - \omega')$, где $S_x^*(\omega')$ — комплексно-сопряженная спектральная плотность, ω' — дополнительная переменная, $\delta(\omega - \omega')$ — дельта-функция, см. (1.20).

3.2.2. Спектральная плотность мощности

Для описания свойств стационарного случайного процесса в частотной области удобнее рассматривать *спектральную плотность мощности (или спектр мощности)* — функцию $W(\omega)$, которая связана с функцией корреляции $R(\tau)$ преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Данные формулы составляют содержание *теоремы Винера — Хинчина*.

Так как дисперсия σ^2 случайного процесса равна значению его функции корреляции $R(\tau)$ при $\tau = 0$, то можно записать:

$$\sigma^2 = R(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega.$$

А так как дисперсия σ^2 имеет смысл средней мощности флуктуаций, то *спектральная плотность мощности $W(\omega)$ характеризует распределение средней мощности случайного сигнала по частоте.*

Спектр мощности $W(\omega)$ является вещественной неотрицательной четной функцией, т. е. $W(-\omega) = W(\omega)$. Т. к. функция корреляции также является четной функцией, $R(-\tau) = R(\tau)$, то формулы (1.48) можно упростить и записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} W(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \\ R(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \end{aligned} \quad (1.49)$$

3.2.3. Односторонний спектр мощности

Односторонний спектр мощности стационарного случайного процесса $F(\omega)$ определяется следующим образом

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0; \\ W(\omega) / \pi, & \omega \geq 0. \end{cases} \quad (1.50)$$

Он позволяет рассчитать дисперсию (среднюю мощность) путем интегрирования по физическим (положительным) частотам:

$$\sigma^2 = R(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (1.51)$$

На практике чаще используется односторонний спектр мощности $N(f)$, характеризующий среднюю мощность случайного сигнала на интервал частот 1 Гц, он определяется следующим образом

$$N(f) = \begin{cases} 0, & f < 0; \\ 2W(\omega)|_{\omega=2\pi f}, & f \geq 0. \end{cases} \quad (1.52)$$

В этом случае средняя мощность случайного сигнала

$$\sigma^2 = R(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega \Big|_{\omega=2\pi f} = \int_0^{\infty} N(f) df. \quad (1.53)$$

3.2.4. Интервал корреляции

В теоретических расчетах *интервал корреляции* τ_k определяется как ширина прямоугольника с площадью, равной площади под графиком функции корреляции (рис. 1.12).

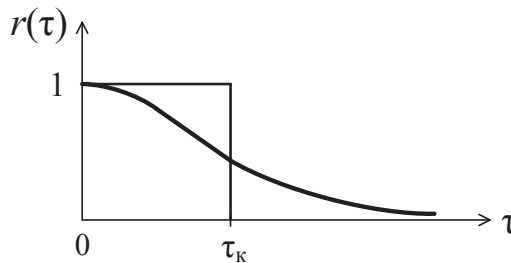


Рис. 1.12. Определение интервала корреляции

$$\tau_k = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} |R(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} |r(\tau)| d\tau, \quad (1.54)$$

где $r(\tau) = R(\tau)/R(0) = R(\tau)/\sigma^2$ — нормированная функция корреляции.

Интервал корреляции является количественной оценкой скорости изменения реализации случайного процесса. Если известна информация о случайном процессе в прошлом, то возможен вероятностный прогноз о его поведении на время порядка τ_k . Мгновенные значения случайного процесса, отстоящие на время $\tau > \tau_k$, практически не коррелированы.

3.2.5. Эффективная ширина спектра

Для определения *эффективной ширины спектра* $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ необходимо случайный процесс с односторонним спектром мощности $F(\omega)$, максимальное значение которого равно F_{max} , заменить эквивалентным случайным процессом с равномерным спектром мощности $F_{\text{экр}}(\omega) = F_{\text{max}}$ в полосе частот $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ (см. рис. 1.13) и потребовать равенства средних мощностей (дисперсий) этих двух случайных процессов. В результате получится расчетная формула

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{F_{\text{max}}} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (1.55)$$

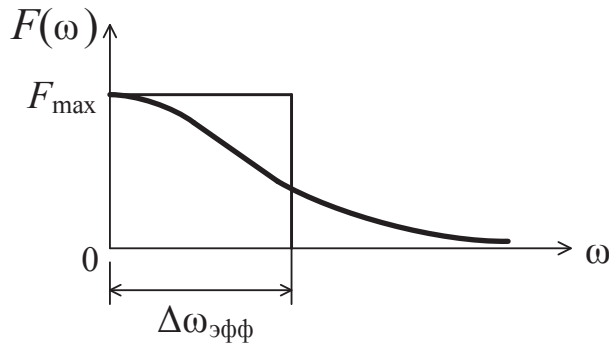


Рис. 1.13. Определение эффективной ширины спектра

Так как спектр мощности и функция корреляции связаны преобразованием Фурье, для которого справедливо свойство изменения масштаба (сжатию по времени соответствует расширение по частоте), то будет наблюдаться зависимость — чем больше эффективная ширина спектра $\Delta\omega_{\text{эфф}}$, тем меньше интервал корреляции τ_k , и наоборот.

3.2.6. Белый шум

Белым шумом называется стационарный случайный процесс с равномерным спектром мощности во всем диапазоне частот от $-\infty$ до ∞ , т. е. для белого шума

$$W(\omega) = W_0 = \text{const}, \quad \omega \in (-\infty, \infty). \quad (1.56)$$

Белый шум является идеализацией, которой физически не существует, однако на практике такая математическая модель может применяться в ограниченной полосе частот, когда эффективная ширина спектра случайного сигнала, воздействующего на цепь, значительно превышает полосу пропускания цепи.

3.3. Источники шумов в электрических цепях

К основным источникам шумов в электрических цепях можно отнести следующие виды шумов.

3.3.1. Тепловой шум

Обусловлен беспорядочным тепловым движением носителей заряда (электронов) в проводнике. На выводах любого проводника или резистора сопротивлением R будет присутствовать флуктуационное на-

пряжение. Средний квадрат (дисперсия) напряжения теплового шума рассчитывается по формуле Найквиста:

$$U_{\text{ш.эфф}}^2 = 4kTR\Delta f, \quad (1.57)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, Δf — полоса частот. Эквивалентная схема «шумящего» резистора показана на рис. 1.14.

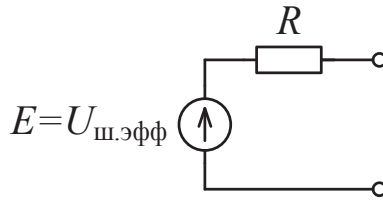


Рис. 1.14. Эквивалентная схема «шумящего» резистора

Тепловой шум представляет собой белый шум с равномерным спектром мощности $N(f) = U_{\text{ш.эфф}}^2 / \Delta f = 4kTR$ в полосе частот примерно до 10^{12} Гц с Гауссовой плотностью вероятности.

3.3.2. Дробовой шум

Обусловлен дискретным перемещением независимых электрических зарядов, например, в электронной лампе вылет электронов с катода, в полупроводниковом диоде пролет носителей заряда через потенциальные барьеры имеют случайный характер. Спектр мощности дробового шума рассчитывается по формуле Шоттки:

$$N(f) = 2qI, \quad (1.58)$$

где $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, I — средний ток. Средний квадрат шумового тока в полосе частот Δf равен $I_{\text{ш.эфф}}^2 = 2qI\Delta f$. Эквивалентная схема «шумящего» диода показана на рис. 1.15.

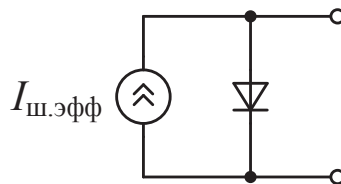


Рис. 1.15. Эквивалентная схема «шумящего» диода

Дробовой шум, так же как и тепловой, представляет собой стационарный случайный процесс с Гауссовым законом распределения с постоянным спектром мощности (1.58) на частотах до сотен мегагерц, единиц гигагерц.

3.3.3. Шумы приемных антенн

Эти шумы имеют место в радиоприемных устройствах и обусловлены приемом излучения космоса, атмосферы и Земли. Для расчета среднего квадрата шумовой ЭДС, наводимой в приемной антенне, используют формулу, аналогичную формуле Найквиста (1.57):

$$E_{\text{ш.эфф}}^2 = 4kT_{\text{ш}}R_A\Delta f,$$

где $T_{\text{ш}}$ — эквивалентная шумовая температура антенны, $T_{\text{ш}} = T_{\text{к}} + T_{\text{атм}} + T_{\text{з}}$; $T_{\text{к}}$, $T_{\text{атм}}$, $T_{\text{з}}$ — составляющие космоса, атмосферы и Земли соответственно, определяются по специальным справочникам; R_A — сопротивление излучения антенны. Эквивалентная схема «шумящей» антенны аналогична схеме, показанной на рис. 1.14.

3.4. Прохождение случайных сигналов через линейные электрические цепи

3.4.1. Основные соотношения

Задача анализа прохождения случайных сигналов через электрические цепи состоит в определении вероятностных и числовых характеристик случайного процесса на выходе, зная характеристики случайного процесса на входе.

Пусть на вход линейной электрической цепи воздействует стационарный случайный процесс $X(t)$ с плотностью вероятности $p(x)$, нулевым математическим ожиданием $m_x = \overline{x(t)} = 0$, дисперсией σ_x^2 , функцией корреляции $R_x(\tau)$ и спектральной плотностью мощности $W_x(\omega)$. Определим соответствующие характеристики случайного процесса $Y(t)$ на выходе цепи.

Нахождение плотности распределения выходного случайного процесса $p(y)$ при произвольном законе распределения входного случайного процесса $p(x)$ в общем случае представляет сложную задачу. Однако если входной случайный процесс $X(t)$ распределен по нормальному (Гауссовому) закону (см. рис. 1.16), т. е.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad (1.59)$$

то выходной случайный процесс также будет нормальным, т. е. будет иметь плотность распределения $p(y)$, аналогичную (1.59), с соответствующими математическим ожиданием m_y и дисперсией σ_y^2 .

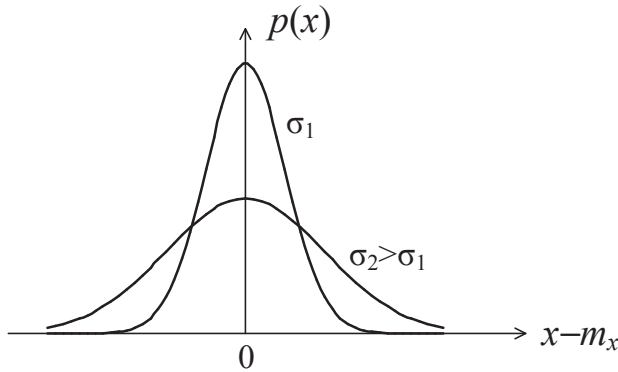


Рис. 1.16. График плотности вероятности Гауссова закона распределения при различных значениях σ

Определение числовых характеристик (моментных функций) случайного процесса на выходе линейной электрической цепи не представляет большой сложности.

Если на вход линейной цепи воздействует стационарный случайный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием $m_x = \overline{x(t)} = 0$, то математическое ожидание выходного случайного процесса $Y(t)$ также будет нулевым: $m_y = \overline{y(t)} = 0$. Функцию корреляции $R_y(\tau)$ и дисперсию σ_y^2 случайного процесса $Y(t)$ на выходе цепи легко определить, воспользовавшись соотношением характеристик в частотной области:

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) |K(j\omega)|^2, \quad (1.60)$$

где $W_y(\omega)$ и $W_x(\omega)$ — спектры мощности случайных процессов на выходе и на входе соответственно, $|K(j\omega)|^2$ — квадрат модуля комплексного коэффициента передачи (квадрат АЧХ) цепи. Тогда в соответствии с теоремой Винера — Хинчина (1.48) функция корреляции выходного случайного процесса

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (1.61)$$

И дисперсия выходного случайного процесса

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega. \quad (1.62)$$

При вычислении функции корреляции $R_y(\tau)$ и дисперсии σ_y^2 , с учетом четности функций $W_x(\omega)$ и $|K(j\omega)|^2$, могут применяться упрощенные формулы, аналогичные (1.49), (1.51), (1.53). Например, если использовать односторонний спектр мощности входного случайного процесса $N_x(f)$, учесть при этом (1.52) и соотношение угловой и линейной частот $\omega = 2\pi f$, то формулы для функции корреляции и дисперсии можно привести к виду:

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} N_x(f) |K(j2\pi f)|^2 \cos(2\pi f \tau) df, \\ \sigma_y^2 = R_y(0) = \int_0^{\infty} N_x(f) |K(j2\pi f)|^2 df, \quad (1.63)$$

где $N_x(f)$ — односторонний спектр мощности входного случайного процесса $X(t)$ на интервал частот в 1 Гц.

3.4.2. Шумовая полоса цепи

Шумовая полоса $\Pi_{\text{ш}}$ — это полоса пропускания идеального полосового фильтра (ПФ) с коэффициентом передачи, равным K_{max} реальной цепи, при которой в случае возбуждения ПФ белым шумом с той же спектральной плотностью мощности N_0 , что и реальной цепи, дисперсии случайных процессов на выходе этого ПФ и реальной цепи будут одинаковыми (рис. 1.17).

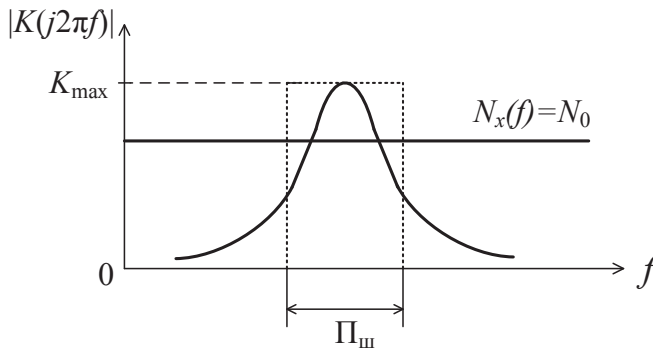


Рис. 1.17. Определение шумовой полосы цепи

Вычисляя по формуле (1.63) дисперсии случайного процесса на выходе реальной цепи с комплексным коэффициентом передачи $K(j2\pi f)$ и на выходе идеального ПФ с полосой пропускания $\Pi_{\text{ш}}$ и приравнивая их,

$$\sigma_y^2 = N_0 \int_0^{\infty} |K(j2\pi f)|^2 df = N_0 K_{\text{max}}^2 \Pi_{\text{ш}}, \quad (1.64)$$

получаем формулу для расчета шумовой полосы

$$\Pi_{\text{ш}} = \frac{1}{K_{\text{max}}^2} \int_0^{\infty} |K(j2\pi f)|^2 df.$$

Если будет известна шумовая полоса цепи, то по формуле (1.64) можно легко вычислить дисперсию случайного процесса на выходе этой цепи, зная спектральную плотность мощности входного белого шума N_0 и максимальное значение коэффициента передачи K_{max} .

4. Совместное прохождение сигнала и шума через линейные электрические цепи

Любая электрическая цепь или система связи подвержена воздействию на нее шумов, которые приводят к искажениям полезного сигнала или передаваемой информации. Поэтому одной из задач радиотехники является изучение и разработка методов снижения уровня шумов относительно уровня полезного сигнала.

4.1. Принцип линейной частотной фильтрации

Электрическим фильтром называется линейная электрическая цепь, предназначенная для выделения сигналов, лежащих в определенном частотном диапазоне. Диапазон частот, в котором значения АЧХ фильтра близки к максимальному значению $K(\omega) = K_0$, называется *полосой пропускания*, а диапазон частот, в котором значения АЧХ малы ($K(\omega) \ll K_0$), называется *полосой подавления*. Частота $\omega_{\text{ср}}$, соответствующая границе полосы пропускания, на которой значение АЧХ $K(\omega)$ уменьшается в определенное число раз (обычно в $\sqrt{2}$) от K_0 , называется *частотой среза*. По расположению полос пропускания и подавления различают следующие основные типы фильтров: фильтр нижних

частот (ФНЧ) с полосой пропускания $0 \leq \omega \leq \omega_{\text{ср}}$; фильтр верхних частот (ФВЧ) с полосой пропускания $\omega_{\text{ср}} \leq \omega < \infty$; полосовой фильтр (ПФ) с полосой пропускания $\omega_{\text{ср1}} \leq \omega \leq \omega_{\text{ср2}}$. На рис. 1.18 показаны АЧХ идеальных фильтров. Кроме указанных существуют гребенчатые фильтры — сложные ПФ с несколькими полосами пропускания; загораживающие (или режекторные) фильтры, предназначенные для подавления сигналов в определенном частотном диапазоне.

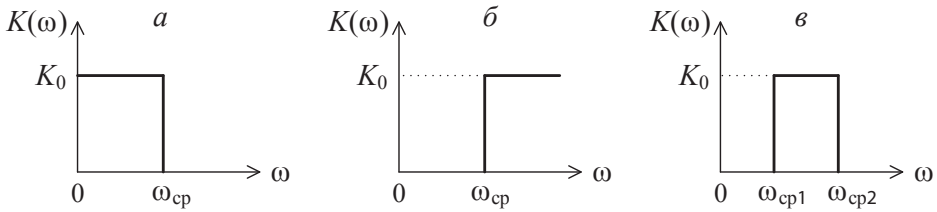


Рис. 1.18. АЧХ идеальных фильтров: *a* — ФНЧ, *б* — ФВЧ, *в* — ПФ

Пусть на вход фильтра с комплексным коэффициентом передачи $K(j\omega)$ (см. рис. 1.19) подается аддитивная смесь (сумма) полезного сигнала $s_{\text{вх}}(t)$ и шума $n_{\text{вх}}(t)$, т. е. входной сигнал фильтра

$$u_{\text{вх}}(t) = s_{\text{вх}}(t) + n_{\text{вх}}(t). \quad (1.65)$$

При этом полезный сигнал и шум не коррелированы, т. е. среднее от их произведения равно нулю,

$$\langle s_{\text{вх}} n_{\text{вх}} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T s_{\text{вх}}(t) n_{\text{вх}}(t) dt = 0. \quad (1.66)$$

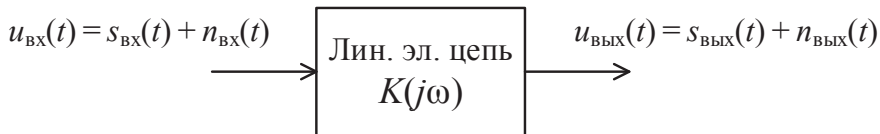


Рис. 1.19. Прохождение сигнала и шума через линейную электрическую цепь

Пусть входной шум $n_{\text{вх}}(t)$ — это стационарный случайный процесс с односторонним спектром мощности $F_n(\omega)$ и пусть полезный сигнал $s_{\text{вх}}(t)$ представлен суммой гармонических составляющих с амплитудами A_k , частотами ω_k и начальными фазами φ_k ,

$$s_{\text{BX}}(t) = \sum_k A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k). \quad (1.67)$$

Если такую смесь сигнала и шума (1.65) пропустить через электрический фильтр с полосой пропускания $\Delta\omega$, примерно равной полосе частот, занимаемой полезным сигналом (рис. 1.20), то на выходе фильтра следует ожидать повышения уровня полезного сигнала относительно уровня шума, т. к. фильтр «отсечет» составляющие спектра шума, лежащие за пределами полосы пропускания.

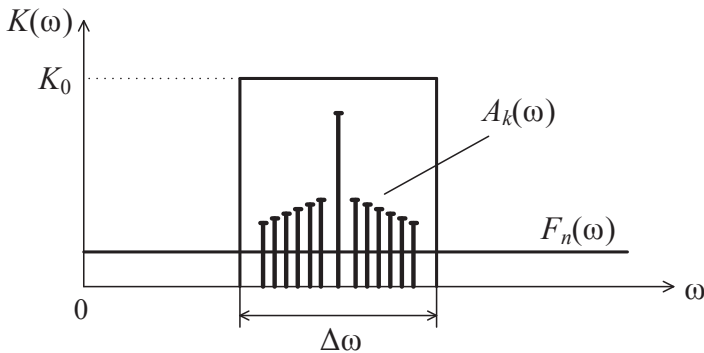


Рис. 1.20. Линейная частотная фильтрация сигнала на фоне шума

Уровень сигнала относительно уровня шума на входе фильтра можно оценить отношением сигнал/шум на входе, которое при выполнении условия (1.66) рассчитывается по формуле

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{Ш}} \right)_{\text{ВХ}} = \frac{\langle s_{\text{ВХ}}^2(t) \rangle}{\sigma_{n_{\text{ВХ}}}^2}, \quad (1.68)$$

где $\langle s_{\text{ВХ}}^2(t) \rangle$ — средняя мощность полезного сигнала, вычисляемая по формуле (1.29), $\sigma_{n_{\text{ВХ}}}^2$ — дисперсия шума на входе фильтра, связанная с его спектром мощности формулой (1.51). Если полезный сигнал $s_{\text{ВХ}}(t)$ представлен суммой гармонических составляющих (1.67) с амплитудами A_k , то его средняя мощность

$$\langle s_{\text{ВХ}}^2(t) \rangle = \sum_k \frac{A_k^2}{2}.$$

Так как фильтр — это линейная цепь, то к нему применим принцип суперпозиции (см. параграф 1.3), т. е. прохождение полезного сигнала

ла и шума можно рассматривать независимо. Таким образом, выходной сигнал фильтра будет иметь вид

$$u_{\text{вых}}(t) = s_{\text{вых}}(t) + n_{\text{вых}}(t),$$

где $s_{\text{вых}}(t)$ — полезный сигнал на выходе, представляющий собой реакцию на $s_{\text{вх}}(t)$, а $n_{\text{вых}}(t)$ — выходной шум, представляющий собой реакцию на $n_{\text{вх}}(t)$. Если воспользоваться параграфами 1.4 и 3.4, то можно определить, что полезный сигнал на выходе фильтра

$$s_{\text{вых}}(t) = \sum_k A_k |K(j\omega_k)| \cos[\omega_k t + \varphi_k + \arg K(j\omega_k)]$$

и дисперсия выходного шума

$$\sigma_{n_{\text{вых}}}^2 = \int_0^{\infty} F_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega.$$

По аналогии с (1.68) можно определить отношение сигнал/шум на выходе фильтра

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{Ш}} \right)_{\text{вых}} = \frac{\langle s_{\text{вых}}^2(t) \rangle}{\sigma_{n_{\text{вых}}}^2}. \quad (1.69)$$

Вычисляя среднюю мощность полезного сигнала на выходе $\langle s_{\text{вых}}^2(t) \rangle$, подставляя ее и дисперсию выходного шума в (1.69), получаем, что отношение сигнал/шум на выходе фильтра

$$\left(\frac{\text{С}}{\text{Ш}} \right)_{\text{вых}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_k A_k^2 |K(j\omega_k)|^2}{\int_0^{\infty} F_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (1.70)$$

где A_k и ω_k — амплитуды и частоты гармонических составляющих полезного сигнала на входе, $|K(j\omega)|$ — модуль комплексного коэффициента передачи (АЧХ) фильтра, $F_n(\omega)$ — односторонний спектр мощности входного шума.

Фильтрация будет приводить к благоприятному результату, если

$$\frac{\left(\frac{\text{С}}{\text{Ш}} \right)_{\text{вых}}}{\left(\frac{\text{С}}{\text{Ш}} \right)_{\text{вх}}} > 1.$$

Из (1.70) следует, что, подбирая АЧХ фильтра $K(\omega) = |K(j\omega)|$, можно добиться повышения отношения $(\text{С}/\text{Ш})_{\text{вых}}$, однако при этом возможны искажения формы полезного сигнала, т. к. для неискаженно-

го прохождения сигнала через цепь (см. параграф 2.5) ее комплексная частотная характеристика должна иметь вид (1.43).

4.2. Оптимальная фильтрация сигналов известной формы

4.2.1. Основные положения. Критерий оптимальности

В ряде задач искажения формы передаваемых сигналов являются допустимыми. Например, при приеме цифровых сигналов в виде последовательности нулей и единиц важно правильно обнаружить передаваемые биты в смеси полезного сигнала и шума, при этом форма импульсов, передающих эти биты, значения не имеет.

Оптимальным называется фильтр, выделяющий полезный сигнал из входной смеси сигнала и шума с наилучшим пиковым отношением сигнал/шум на выходе.

Структурная схема оптимального обнаружителя импульсных сигналов показана на рис. 1.21, а ее принцип действия поясняется на рис. 1.22.

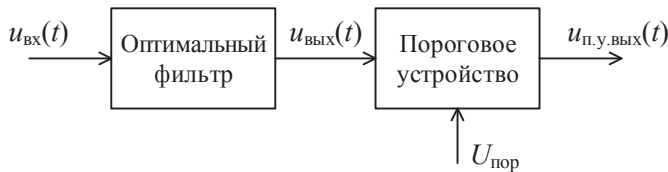


Рис. 1.21. Структурная схема оптимального обнаружителя

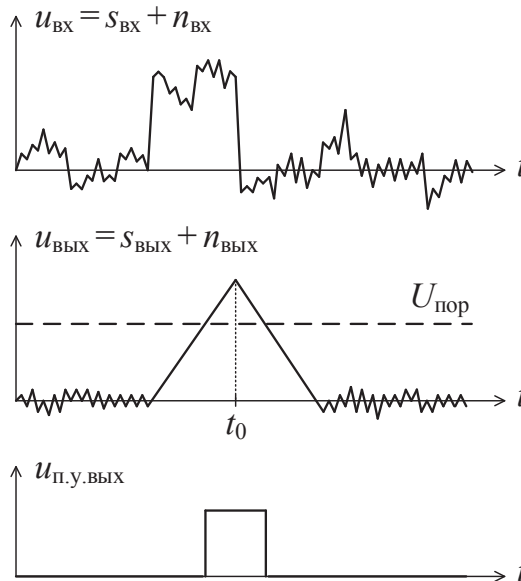


Рис. 1.22. Принцип действия оптимального обнаружителя

Пусть на вход оптимального обнаружителя (см. рис. 1.21, 1.22) подается сумма $u_{\text{вх}}(t)$ полезного сигнала известной формы $s_{\text{вх}}(t)$ и шума $n_{\text{вх}}(t)$. На выходе оптимального фильтра будет наблюдаться сигнал $u_{\text{вых}}(t) = s_{\text{вых}}(t) + n_{\text{вых}}(t)$, отличающийся по форме от входного полезного сигнала, достигающий пикового значения в момент времени $t = t_0$. Если подать данный сигнал на пороговое устройство, на второй вход которого подается опорный пороговый уровень $U_{\text{пор}}$, формирующее на своем выходе высокий уровень при $u_{\text{вых}}(t) > U_{\text{пор}}$, то на выходе порогового устройства $u_{\text{п.у.вых}}(t)$ получим прямоугольный импульс, по наличию которого можно сделать вывод о наличии полезного сигнала во входной смеси сигнала и шума.

4.2.2. Согласованные фильтры

Обозначим $s_{\text{вых}}(t_0)$ — пиковое значение полезного сигнала на выходе оптимального фильтра. Тогда пиковое отношение сигнал/шум

$$\left(\frac{C}{\Pi} \right)_{\text{пик}} = \frac{s_{\text{вых}}^2(t_0)}{\sigma_{n_{\text{вых}}}^2}, \quad (1.71)$$

где $s_{\text{вых}}^2(t_0)$ — пиковая мощность полезного сигнала, $\sigma_{n_{\text{вых}}}^2$ — дисперсия (средняя мощность) шума на выходе оптимального фильтра.

Как было показано выше, в параграфах 1.7 и 2.4, линейная электрическая цепь во временной области производит свертку входного воздействия с импульсной характеристикой цепи $h(t)$, см. формулы (1.27) и (1.41), т. е. если на вход цепи подается сигнал $s_{\text{вх}}(t)$, то выходной сигнал

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

и в момент времени $t = t_0$

$$s_{\text{вых}}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau.$$

Если применить неравенство Коши — Буняковского [3], то можно записать, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t_0 - \tau) d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}^2(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t_0 - \tau) d\tau}. \quad (1.72)$$

При этом равенство в формуле (1.72) имеет место, если сомножители в подынтегральном выражении в левой части пропорциональ-

ны друг другу, т. е. $h(t_0 - \tau) = k s_{\text{вх}}(\tau)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, для максимизации пикового значения $s_{\text{вых}}(t_0)$ фильтр должен иметь импульсную характеристику вида:

$$h_{\text{согл}}(t) = k s_{\text{вх}}(t_0 - t), \quad (1.73)$$

где k — положительный вещественный коэффициент, $s_{\text{вх}}(t)$ — входной полезный сигнал, t_0 — момент времени, соответствующий пиковому значению. Фильтр с такой импульсной характеристикой (1.73) называется *согласованным с сигналом* $s_{\text{вх}}(t)$. Импульсная характеристика согласованного фильтра представляет собой масштабированную в k раз зеркальную копию сигнала $s_{\text{вх}}(t)$, смещенную вправо на величину t_0 (см. рис. 1.23). На основании того, что $h(t) = 0$ при $t < 0$ (свойство импульсной характеристики), можно показать, что момент появления пикового значения t_0 должен быть не меньше длительности сигнала, для одиночного импульса длительностью $\tau_{\text{и}}$

$$t_0 \geq \tau_{\text{и}}.$$

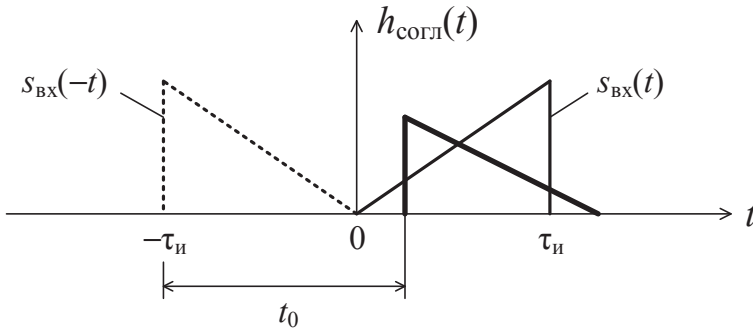


Рис. 1.23. Построение импульсной характеристики согласованного фильтра

Используя формулу (1.40), согласно которой комплексная частотная характеристика цепи равна преобразованию Фурье от ее импульсной характеристики, можно рассчитать комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра

$$K_{\text{согл}}(j\omega) = k S_{\text{вх}}^*(\omega) e^{-j\omega t_0}, \quad (1.74)$$

где $S_{\text{вх}}^*(\omega)$ — комплексно-сопряженная спектральная плотность сигнала $s_{\text{вх}}(t)$, с которым фильтр согласован. Благодаря такому виду

комплексного коэффициента передачи все спектральные составляющие входного сигнала в момент времени t_0 складываются когерентно, обеспечивая максимальное значение выходного сигнала фильтра.

Анализируя (1.74), можно увидеть, что АЧХ согласованного фильтра с точностью до коэффициента k должна совпадать с амплитудным спектром сигнала, $K_{\text{согл}}(\omega) = |K_{\text{согл}}(j\omega)| = k|S_{\text{вх}}(\omega)|$, а ФЧХ с точностью до линейного слагаемого $(-\omega t_0)$, характеризующего запаздывание, должна быть противоположна по знаку фазовому спектру сигнала, $\varphi_{\text{согл}}(\omega) = \arg K_{\text{согл}}(j\omega) = -\arg S_{\text{вх}}(\omega) - \omega t_0$.

Используя временной метод, см. параграф 1.7, подставляя (1.73) в интеграл свертки (1.27) и сравнивая результат с (1.46), можно увидеть, что *согласованный фильтр вычисляет взаимную корреляционную функцию (ВКФ) входного сигнала $u_{\text{вх}}(t)$ и сигнала $s_{\text{вх}}(t)$, с которым он согласован*. Если на вход согласованного фильтра подать сигнал $u_{\text{вх}}(t) = s_{\text{вх}}(t)$, то сигнал на его выходе будет пропорционален автокорреляционной функции (АКФ) этого сигнала:

$$u_{\text{вых}}(t) \Big|_{u_{\text{вх}}(t)=s_{\text{вх}}(t)} = k B_s(t - t_0),$$

где $B_s(t - t_0)$ — АКФ сигнала $s_{\text{вх}}(t)$, см. формулу (1.45), смещенная в точку t_0 . Т. к. $B_s(0) = E_s$, то получаем, что $s_{\text{вых}}(t_0) = k E_s$, где E_s — энергия сигнала $s_{\text{вх}}(t)$.

Если на входе согласованного фильтра с комплексным коэффициентом передачи (1.74) будет присутствовать белый шум $n_{\text{вх}}(t)$ со спектральной плотностью мощности (1.56), то, воспользовавшись формулами (1.62) и (1.44), можно определить, что дисперсия шума на выходе фильтра $\sigma_{n_{\text{вых}}}^2 = k^2 W_0 E_s$. Подставляя результаты в (1.71), можно рассчитать отношение сигнал/шум на выходе фильтра.

Таким образом, *пиковое отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра*

$$\left(\frac{C}{\Pi} \right)_{\text{согл}} = \frac{E_s}{W_0} \quad \text{или} \quad \left(\frac{C}{\Pi} \right)_{\text{согл}} = \frac{2E_s}{N_0}, \quad (1.75)$$

где E_s — энергия полезного сигнала $s_{\text{вх}}(t)$, с которым фильтр согласован; W_0 — спектральная плотность мощности входного белого шума; N_0 — односторонний спектр мощности входного белого шума на интервал частот 1 Гц.

4.2.3. Квазиоптимальная фильтрация

Квазиоптимальным называется фильтр более простой конструкции по сравнению с согласованным, который обеспечивает отношение сигнал/шум на выходе, близкое к согласованному.

Например, RC -цепь с постоянной времени $\tau_{RC} = RC = \tau_n / 1,25$ является квазиоптимальным фильтром для прямоугольного импульса длительностью τ_n , при этом проигрыш в отношении сигнал/шум по сравнению с согласованным фильтром составляет примерно 20 %. Вывод данного утверждения приводится в части II, в параграфе 1.6.

ЧАСТЬ II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

1. Примеры решения задач

1.1. Прохождение прямоугольного импульса через RC -цепь

Определить временным методом напряжение $u_2(t)$ на выходе RC -цепи, если на вход подается воздействие $u_1(t)$ в виде прямоугольного импульса длительностью $\tau_{\text{и}}$ и амплитудой U_0 (рис. 2.1).

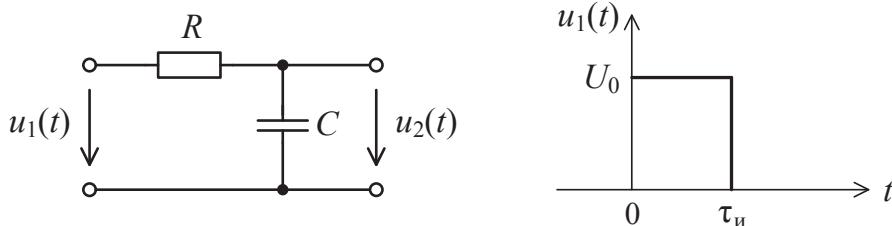


Рис. 2.1. Рисунок к заданию в примере 1

Временной метод предполагает использование для расчетов переходной или импульсной характеристик цепи (см. часть I, параграфы 1.5–1.7), поэтому найдем эти характеристики. Для этого составим операторную схему замещения цепи (рис. 2.2) при нулевых начальных условиях и определим операторную характеристику.

Т. к. воздействием является напряжение $u_1(t)$, а реакцией напряжение $u_2(t)$, то необходимо определить операторный коэффициент передачи по напряжению $K_U(p) = U_2(p)/U_1(p)$. Для единственного контура,

показанного на рис. 2.2, с помощью закона Кирхгофа для напряжений и закона Ома в операторной форме можно записать:

$$U_1(p) = Z_R(p)I_1(p) + Z_C(p)I_1(p).$$

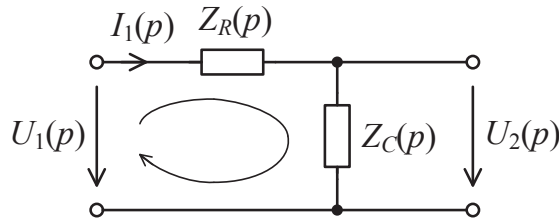


Рис. 2.2. Операторная схема замещения RC -цепи

Откуда находим изображение тока

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z_R(p) + Z_C(p)}.$$

И далее по закону Ома в операторной форме — изображение выходного напряжения

$$U_2(p) = Z_C(p)I_1(p) = \frac{Z_C(p)U_1(p)}{Z_R(p) + Z_C(p)}.$$

И затем определяем операторный коэффициент передачи

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_C(p)}{Z_R(p) + Z_C(p)}.$$

Подставив операторные сопротивления элементов (1.23), умножив числитель и знаменатель на pC и затем разделив на RC , получим

$$K_U(p) = \frac{1/RC}{p + 1/RC}.$$

Используя формулы (1.21), устанавливающие связь между временными характеристиками и операторной характеристикой, а также соответствие $\frac{1}{p + \alpha} \Leftrightarrow e^{-\alpha t}$ из таблицы преобразования Лапласа [2, прил. 1], находим импульсную характеристику

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/\tau_{RC}},$$

где $\tau_{RC} = RC$ — постоянная времени RC -цепи. Для определения переходной характеристики воспользуемся соотношениями (1.22).

$$H(t) = \int_0^t h(t) dt = \frac{1}{RC} \int_0^t e^{-t/\tau_{RC}} dt = 1 - e^{-t/\tau_{RC}}.$$

Временной метод предполагает применение для расчетов одной из формул — (1.26) или (1.27). Выбор формулы зависит от удобства решения задачи. Воспользуемся интегралом свертки (1.27) и определим выходное напряжение $u_2(t)$. Для этого необходимо рассмотреть два интервала времени.

1. $0 \leq t \leq \tau_n$.

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{U_0}{RC} \int_0^t e^{-(t-\tau)/\tau_{RC}} d\tau.$$

Выполним замену переменной, обозначим $t - \tau = \theta$, при этом $d\tau = -d\theta$, а также необходимо учесть изменение пределов интегрирования для переменной θ , тогда

$$u_2(t) = -\frac{U_0}{RC} \int_t^0 e^{-\theta/\tau_{RC}} d\theta = \frac{U_0}{RC} \int_0^t e^{-\theta/\tau_{RC}} d\theta = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau_{RC}} \right).$$

К моменту окончания импульса напряжение на выходе цепи достигнет значения

$$u_2(\tau_n) = U_0 \left(1 - e^{-\tau_n/\tau_{RC}} \right). \quad (2.1)$$

2. $t > \tau_n$.

Так как в точке $t = \tau_n$ функция $u_1(t)$ имеет разрыв, то интегрирование необходимо выполнять отдельно на интервалах от 0 до τ_n и от τ_n до текущего t .

$$u_2(t) = \int_0^{\tau_n} u_1(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_{\tau_n}^t u_1(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Подставляя значения функции $u_1(t)$ (см. рис. 2.1) на соответствующих интервалах времени, получаем

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= \int_0^{\tau_n} U_0 h(t-\tau) d\tau + \int_{\tau_n}^t 0 \cdot h(t-\tau) d\tau = \frac{U_0}{RC} \int_0^{\tau_n} e^{-(t-\tau)/\tau_{RC}} d\tau = \\
 &= \frac{U_0}{RC} e^{-t/\tau_{RC}} \int_0^{\tau_n} e^{\tau/\tau_{RC}} d\tau = U_0 e^{-t/\tau_{RC}} \left(e^{\tau_n/\tau_{RC}} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Используя преобразование показательных функций, можно перенести начало отсчета времени в точку $t = \tau_n$ и записать

$$u_2(t) = U_0 \left(1 - e^{-\tau_n/\tau_{RC}} \right) e^{-(t-\tau_n)/\tau_{RC}}.$$

График напряжения $u_2(t)$ показан на рис. 2.3.

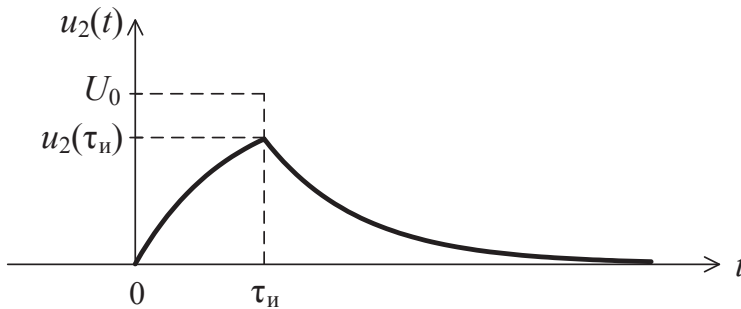


Рис. 2.3. Реакция RC -цепи на прямоугольный импульс

1.2. Прохождение белого шума через RC -цепь

Рассчитать функцию корреляции $R_y(\tau)$ и дисперсию σ_y^2 случайного процесса на выходе RC -цепи, показанной на рис. 2.4, если на ее вход подается белый шум с заданной спектральной плотностью мощности $W_x(\omega) = W_0$ в диапазоне частот $\omega \in (-\infty, \infty)$. Определить интервал корреляции τ_k и эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ выходного случайного процесса.

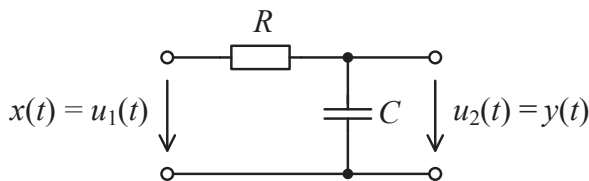


Рис. 2.4. Рисунок к заданию в примере 2

Для расчета числовых характеристик случайного процесса $Y(t)$ на выходе RC -цепи воспользуемся формулами (1.61), (1.62).

Прежде всего необходимо определить комплексный коэффициент передачи цепи. Т. к., по заданию, воздействием является входное напряжение $u_1(t)$, а реакцией — выходное напряжение $u_2(t)$, то необходимо рассчитать комплексный коэффициент передачи по напряжению $K_U(j\omega) = \dot{U}_{m2} / \dot{U}_{m1}$, где \dot{U}_{m2} и \dot{U}_{m1} — комплексные амплитуды выходного и входного напряжений соответственно. Для этого воспользуемся комплексной схемой замещения делителя напряжения, показанной на рис. 2.5.

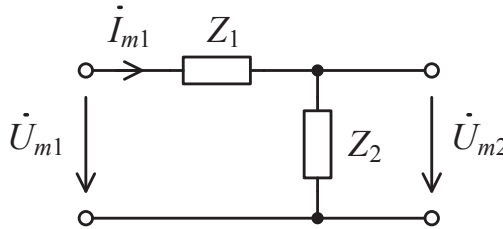


Рис. 2.5. Комплексная схема замещения делителя напряжения

Пользуясь тем, что при последовательном соединении комплексные сопротивления элементов суммируются, а также законом Ома в комплексной форме, можно показать, что

$$\dot{I}_{m1} = \frac{\dot{U}_{m1}}{Z_1 + Z_2} \text{ и } \dot{U}_{m2} = \dot{I}_{m1} Z_2 = \frac{\dot{U}_{m1} Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Откуда получается, что для схемы, показанной на рис. 2.5,

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (2.2)$$

Сравнивая схемы на рис. 2.4 и на рис. 2.5, легко увидеть, что $Z_1 = Z_R$ и $Z_2 = Z_C$. Подставляя комплексные сопротивления элементов (1.11) в (2.2), получаем, что для RC -цепи

$$K_U(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Квадрат модуля комплексного коэффициента передачи

$$|K_U(j\omega)|^2 = \frac{1}{|1 + j\omega RC|^2} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}. \quad (2.3)$$

Подставляя спектральную плотность мощности входного случайного процесса $W_x(\omega) = W_0$ и полученное выражение для $|K_U(j\omega)|^2$ в (1.61), а также учитывая четность функции $|K_U(j\omega)|^2$, получаем

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_U(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} |K_U(j\omega)|^2 \cos \omega\tau d\omega = \\ &= \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau}{1 + (\omega RC)^2} d\omega. \end{aligned}$$

Используя табличный интеграл [6]

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|} \quad (2.4)$$

и выполняя замену переменной $\omega RC = x$ (при этом $\omega = x/RC$, $d\omega = dx/RC$), получаем

$$R_y(\tau) = \frac{W_0}{\pi} \frac{1}{RC} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\tau}{RC} x}{1 + x^2} dx = \frac{W_0}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{RC}}}, \quad (2.5)$$

где $\tau_{RC} = RC$ — постоянная времени RC -цепи.

На рис. 2.6 показан график функции корреляции $R_y(\tau)$. Зная функцию корреляции стационарного случайного процесса, легко найти его дисперсию, воспользовавшись свойством $\sigma^2 = R(0)$, в данном случае $\sigma_y^2 = R_y(0) = W_0 / 2RC$.

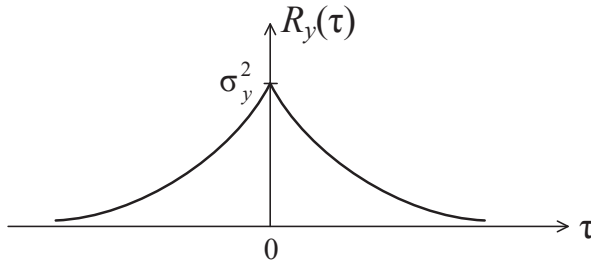


Рис. 2.6. График функции корреляции случайного процесса на выходе RC -цепи при подаче на вход белого шума

Покажем расчет дисперсии случайного процесса на выходе цепи с использованием формулы (1.62), для этого подставим в (1.62) спектральную плотность мощности входного белого шума $W_x(\omega) = W_0$ и выражение (2.3) для квадрата АЧХ, в результате с учетом четности подынтегральной функции получим:

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_U(j\omega)|^2 d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} |K_U(j\omega)|^2 d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega RC)^2}.$$

Используя неопределенный интеграл [6]

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (2.6)$$

и учитывая, что $\operatorname{arctg} \infty = \pi/2$, а $\operatorname{arctg} 0 = 0$, получаем:

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{\pi(RC)^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2} = \frac{W_0}{\pi RC} \operatorname{arctg}(\omega RC) \Big|_0^{\infty} = \frac{W_0}{2RC}. \quad (2.7)$$

Для расчета интервала корреляции τ_k случайного процесса на выходе RC -цепи воспользуемся формулой (1.54) и подставим в нее функцию корреляции $R_y(\tau)$ (2.5), тогда

$$\tau_k = \int_0^{\infty} e^{-\tau/\tau_{RC}} d\tau = -\tau_{RC} e^{-\tau/\tau_{RC}} \Big|_0^{\infty} = -\tau_{RC} (e^{-\infty} - e^0) = \tau_{RC}.$$

Таким образом, интервал корреляции случайного процесса на выходе RC -цепи первого порядка равен постоянной времени цепи.

Для расчета эффективной ширины спектра воспользуемся формулой (1.55), в которую необходимо подставить односторонний спектр мощности $F_y(\omega)$ выходного случайного процесса, который можно найти, воспользовавшись формулами (1.60) и (1.50). Тогда спектр мощности случайного процесса на выходе RC -цепи

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) |K_U(j\omega)|^2 = \frac{W_0}{1 + (\omega RC)^2}, \quad \omega \in (-\infty, \infty).$$

Соответствующий ему односторонний спектр мощности

$$F_y(\omega) = \frac{W_y(\omega)}{\pi} = \frac{W_0 / \pi}{1 + (\omega RC)^2}, \quad \omega \in [0, \infty).$$

И эффективная ширина спектра с учетом табличного интеграла (2.6) и того, что $\arctg \infty = \pi/2$, а $\arctg 0 = 0$:

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{(RC)^2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{RC} \approx 1,57\omega_{\text{ср}},$$

где $\omega_{\text{ср}} = 1/RC$ — частота среза (частота, при которой значение АЧХ $|K_U(j\omega)|$ уменьшается в $\sqrt{2}$ раз от максимального значения).

1.3. Прохождение белого шума через ФНЧ второго порядка

Рассчитать функцию корреляции $R_y(\tau)$ и дисперсию σ_y^2 случайного процесса на выходе фильтра нижних частот (ФНЧ) 2-го порядка с модулем комплексного коэффициента передачи

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)}}, \quad (2.8)$$

где τ_1, τ_2 — коэффициенты, которые могут иметь смысл постоянных времени звеньев первого порядка [3, пример 10.3]. На вход цепи подается белый шум с заданной спектральной плотностью мощности $W_x(\omega) = W_0$ в диапазоне частот $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Примером ФНЧ второго порядка может быть электрическая цепь, состоящая из двух каскадно соединенных RC -цепей (RC -цепь второго порядка), а также цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора, индуктивной катушки и конденсатора. Подробнее такие цепи описаны в главе 2 части III.

Для расчета функции корреляции случайного процесса на выходе цепи воспользуемся формулой (1.61). Подставляя $W_x(\omega) = W_0$, выражение (2.8) для $|K(j\omega)|$ и учитывая четность функции $W_x(\omega)|K(j\omega)|^2$, получаем

$$R_y(\tau) = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)} d\omega.$$

Разложим дробь под интегралом на простые дроби

$$\frac{1}{(1 + \tau_1^2 \omega^2)(1 + \tau_2^2 \omega^2)} = \frac{A}{1 + \tau_1^2 \omega^2} + \frac{B}{1 + \tau_2^2 \omega^2},$$

где

$$A = \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}, \quad B = -\frac{\tau_2^2}{\tau_1^2 - \tau_2^2}.$$

Далее, используя табличный интеграл (2.4), аналогично (2.5) находим

$$R_y(\tau) = \frac{W_0}{2(\tau_1^2 - \tau_2^2)} \left(\tau_1 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_2}} \right).$$

График функции корреляции будет зависеть от соотношения постоянных времени τ_1 и τ_2 . Например, для RC -цепи 2-го порядка, описанной в главе 2 части III, $\tau_1 \approx 6,85\tau_2 \approx 2,62RC$. График нормированной функции корреляции $r_y(\tau) = R_y(\tau) / \sigma_y^2$ на положительной полуоси $\tau \geq 0$ в этом случае показан на рис. 2.7, на этом же рисунке показан график функции корреляции для RC -цепи первого порядка (частоты среза цепей ω_{cp} одинаковые).

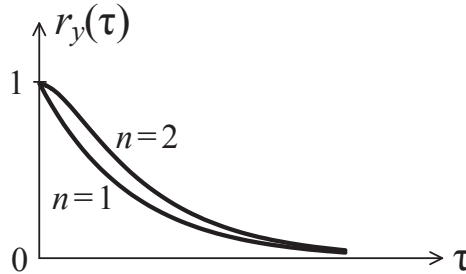


Рис. 2.7. Графики функций корреляции случайных процессов на выходе RC -цепей первого ($n = 1$) и второго ($n = 2$) порядков

Как видно из рис. 2.7, случайный процесс на выходе RC -цепи 2-го порядка будет коррелирован с несколько большим интервалом корреляции по сравнению с RC -цепью первого порядка. Это можно подтвердить, рассчитывая интервал корреляции по формуле (1.54).

Дисперсию найдем, используя свойство $\sigma_y^2 = R_y(0)$, тогда

$$\sigma_y^2 = \frac{W_0}{2(\tau_1^2 - \tau_2^2)} (\tau_1 - \tau_2) = \frac{W_0}{2(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Сравнивая полученное выражение с (2.7), можно сделать вывод о незначительном уменьшении дисперсии шума на выходе RC -цепи

2-го порядка по сравнению с цепью первого порядка (при одинаковых частотах среза ω_{cp}).

1.4. Прохождение белого шума через частотно-избирательную цепь

Рассчитать функцию корреляции $R_y(\tau)$ и дисперсию σ_y^2 случайного процесса на выходе узкополосной частотно-избирательной цепи с модулем комплексного коэффициента передачи

$$|K(j\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2}(\omega - \omega_0)^2}}, \quad (2.9)$$

где K_0 — максимальное значение коэффициента передачи на частоте ω_0 , Q — добротность, $Q \gg 1$, ω_0 — центральная частота. На вход цепи подается белый шум с заданной спектральной плотностью мощности $W_x(\omega) = W_0$ в диапазоне частот $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Частотно-избирательной называется электрическая цепь, АЧХ которой имеет выраженный максимум на частоте $\omega_0 > 0$. Такие цепи пропускают на выход сигналы с частотами ω , лежащими в узкой полосе частот в окрестности центральной частоты ω_0 . Простейшими примерами частотно-избирательных цепей являются последовательный и параллельный колебательные контуры [1, 2], а также резонансный усилитель [3].

На рис. 2.8 показано преобразование спектра мощности белого шума частотно-избирательной цепью. Здесь $F_x(\omega) = F_0 = W_x(\omega)/\pi = W_0/\pi$ — односторонний спектр мощности белого шума на входе цепи, $F_y(\omega)$ — спектр мощности случайного процесса на выходе цепи. В соответствии с формулой (1.60) $F_y(\omega) = F_0 |K(j\omega)|^2$, поэтому функция $F_y(\omega)$, так же как и $|K(j\omega)|$, будет иметь выраженный максимум на частоте ω_0 . Такой случайный процесс, спектр мощности которого сосредоточен в узкой полосе частот в окрестности центральной частоты ω_0 , называется узкополосным.

Для расчета функции корреляции случайного процесса на выходе цепи воспользуемся формулой (1.61). Подставляя $W_x(\omega) = W_0$ и выражение (2.9) для $|K(j\omega)|$ в (1.61) и учитывая четность функции $W_x(\omega)|K(j\omega)|^2$, получаем:

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega \tau}{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

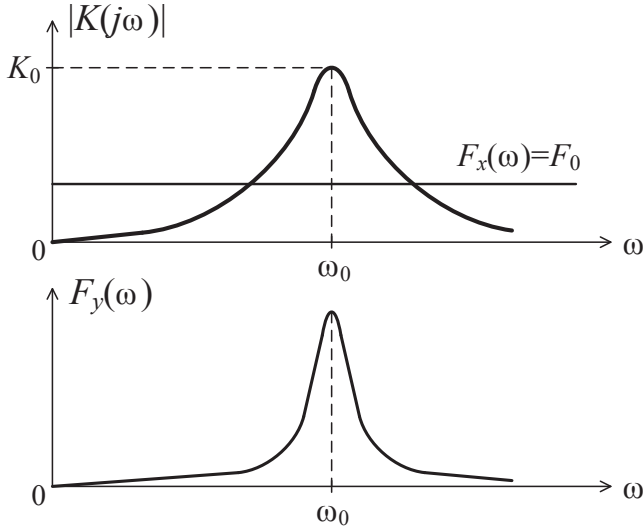


Рис. 2.8. Преобразование спектра мощности белого шума частотно-избирательной цепью

Перейдем от интегрирования по высокой частоте к интегрированию по низкой частоте, обозначив $(\omega - \omega_0) = \Omega$, тогда

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{\cos(\omega_0 + \Omega)\tau}{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \Omega^2} d\Omega.$$

Расписывая косинус суммы $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ и учитывая линейность интеграла, получим:

$$R_y(\tau) = \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{\cos(\Omega\tau) d\Omega}{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \Omega^2} \cos \omega_0 \tau - \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{\sin(\Omega\tau) d\Omega}{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \Omega^2} \sin \omega_0 \tau. \quad (2.10)$$

Таким образом, общее выражение функции корреляции узкополосного случайного процесса на выходе частотно-избирательной цепи с центральной частотой ω_0 имеет вид:

$$R_y(\tau) = a_y(\tau) \cos \omega_0 \tau - b_y(\tau) \sin \omega_0 \tau.$$

Для вычисления функций $a_y(\tau)$ и $b_y(\tau)$ воспользуемся следующим упрощением. Т. к. $Q \gg 1$, то подынтегральные функции в формуле (2.10) сосредоточены в окрестности $\Omega = 0$, а вклад от составляющих с частотами $-\infty < \Omega < -\omega_0$ будет пренебрежимо малым, поэтому при вычислении интегралов заменим нижний предел с $(-\omega_0)$ на $(-\infty)$. Далее воспользуемся четностью подынтегральной функции в первом слагаемом и нечетностью во втором слагаемом в формуле (2.10), а также табличным интегралом (2.4). В таком случае

$$a_y(\tau) \approx \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\Omega\tau) d\Omega}{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \Omega^2} = \frac{2W_0 K_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\Omega\tau) d\Omega}{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \Omega^2} = \frac{W_0 K_0^2 \omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} |\tau|},$$

$$b_y(\tau) \approx \frac{W_0 K_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega\tau) d\Omega}{1 + \frac{4Q^2}{\omega_0^2} \Omega^2} = 0.$$

График функции корреляции узкополосного случайного процесса на выходе частотно-избирательной цепи показан на рис. 2.9.

Для вычисления дисперсии случайного процесса на выходе цепи воспользуемся тем, что $\sigma_y^2 = R_y(0) = \frac{W_0 K_0^2 \omega_0}{2Q}$.

Любая реализация узкополосного случайного процесса представляет собой квазигармоническую функцию

$$y(t) = U_y(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_y(t)],$$

где $U_y(t)$ и $\varphi_y(t)$ — медленно изменяющиеся по сравнению с $\cos \omega_0 t$ случайные функции. График функции $y(t)$ показан на рис. 2.10.

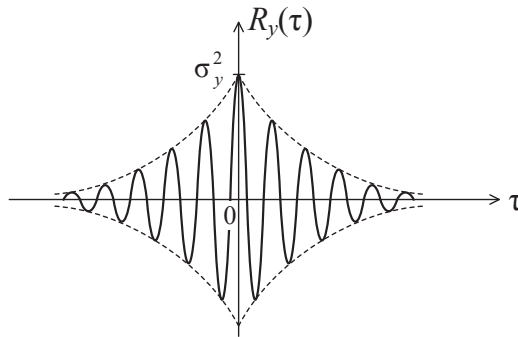


Рис. 2.9. График функции корреляции узкополосного случайного процесса на выходе частотно-избирательной цепи

Мгновенные значения амплитуды (огibaющей) реализации узкополосного случайного процесса $U_y(t)$ распределены по закону Рэля [3, 4], т. е. плотность вероятности огibaющей

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_y^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma_y^2}}, \quad 0 \leq U < \infty.$$

А мгновенные значения начальной фазы $\varphi_y(t)$ распределены равномерно на отрезке от 0 до 2π , т. е. плотность распределения начальной фазы

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

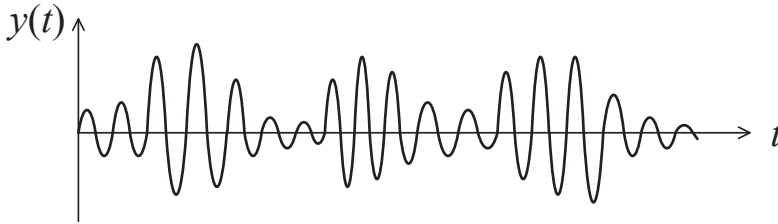


Рис. 2.10. График реализации узкополосного случайного процесса на выходе частотно-избирательной цепи

1.5. Построение согласованного фильтра для прямоугольного импульса

Определить импульсную характеристику и комплексный коэффициент передачи фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом $s(t)$ амплитудой U_0 и длительностью $\tau_{\text{и}}$, показанным на рис. 2.11. Изобразить структурную схему фильтра. Рассчитать выходной сигнал согласованного фильтра и определить пиковое отношение сигнал/шум на выходе, если на входе присутствует белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 .

Импульсная характеристика согласованного фильтра $h_{\text{согл}}(t)$ рассчитывается по формуле (1.73), а ее графическое построение показано на рис. 1.23. Для определения $h_{\text{согл}}(t)$ сигнал, с которым фильтр согласован, необходимо зеркально отобразить относительно вертикальной

оси, а затем сместить вправо на величину $t_0 \geq \tau_{\text{и}}$, где $\tau_{\text{и}}$ — длительность импульса, и масштабировать в k раз. Пусть $t_0 = \tau_{\text{и}}$, построение импульсной характеристики фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом, в этом случае показано на рис. 2.12. Как видно из рис. 2.12, импульсная характеристика $h_{\text{согл}}(t)$ должна представлять собой масштабную копию самого прямоугольного импульса $s(t)$.

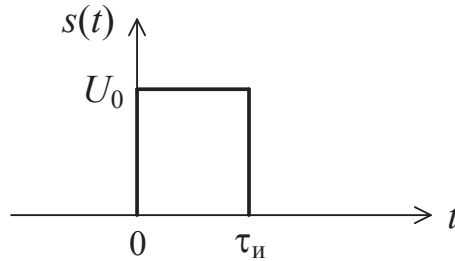


Рис. 2.11. Рисунок к заданию в примере 5

Комплексный коэффициент передачи согласованного фильтра $K_{\text{согл}}(j\omega)$ связан со спектральной плотностью $S(\omega)$ сигнала $s(t)$ формулой (1.74). Для расчета спектральной плотности $S(\omega)$ удобно воспользоваться свойствами преобразования Фурье [3, 7], однако в данном случае спектральная плотность легко рассчитывается по определению (1.36). Подставляя сигнал $s(t)$ (см. рис. 2.11) в формулу прямого преобразования Фурье (1.36), получаем

$$S(\omega) = U_0 \int_0^{\tau_{\text{и}}} e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{(-j\omega)} (e^{-j\omega\tau_{\text{и}}} - 1).$$

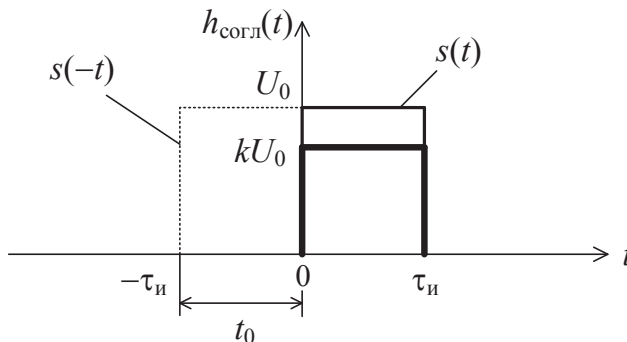


Рис. 2.12. Построение импульсной характеристики фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

И далее, используя (1.74), находим

$$K_{\text{согл}}(j\omega) = \frac{k}{j\omega} (e^{j\omega\tau_{\text{и}}} - 1) e^{-j\omega t_0} \bigg|_{t_0 = \tau_{\text{и}}} = \frac{k}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_{\text{и}}}). \quad (2.11)$$

Так как временная и частотная области представления сигналов связаны преобразованием Фурье, а согласно свойствам преобразования Фурье [3] $\int s(t)dt \Leftrightarrow S(\omega) / j\omega$ и $s(t - t_3) \Leftrightarrow S(\omega)e^{-j\omega t_3}$, где t_3 — время задержки, то комплексному коэффициенту передачи (2.11) будет соответствовать схема, показанная на рис. 2.13.

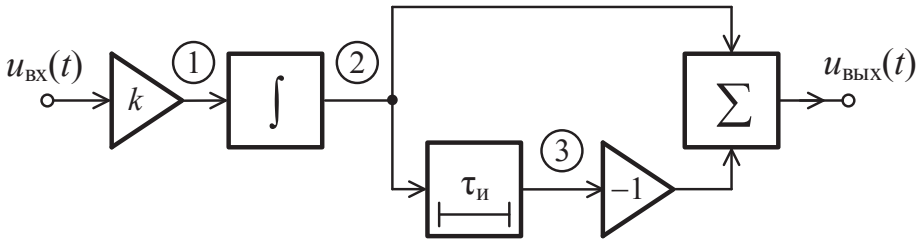


Рис. 2.13. Структурная схема фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

Схема состоит из масштабного усилителя с коэффициентом передачи k , интегратора (\int) и сумматора (Σ), на один вход сумматора подается сигнал непосредственно с выхода интегратора, а на другой вход — сигнал, прошедший линию задержки ($|\cdot|$) на величину длительности импульса $\tau_{\text{и}}$ и инвертор (-1). Для того чтобы убедиться, что данная схема будет иметь требуемую импульсную характеристику (см. рис. 2.12), необходимо на ее вход подать дельта-функцию согласно определению (1.18). Временные диаграммы, иллюстрирующие формирование импульсной характеристики, показаны на рис. 2.14. Из них видно, что, действительно, схема на рис. 2.13 будет обладать требуемой импульсной характеристикой $h_{\text{согл}}(t)$.

В параграфе 4.2 части I было показано, что сигнал на выходе согласованного фильтра пропорционален АКФ сигнала, с которым он согласован, смещенной в точку $\tau = t_0$. Для расчета АКФ прямоугольного импульса удобно воспользоваться формулой (1.45) и графиками, показанными на рис. 2.15.

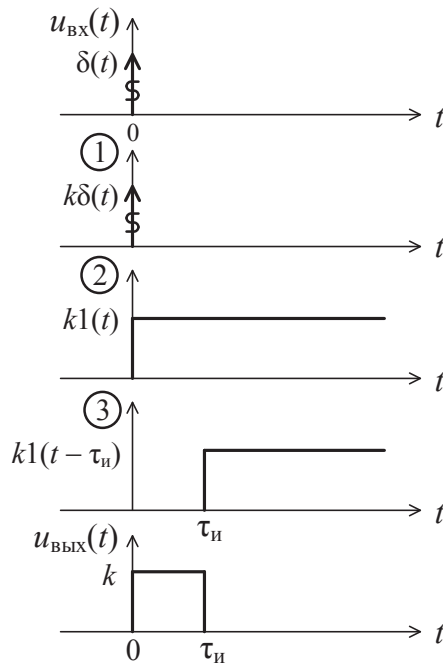


Рис. 2.14. Временные диаграммы, поясняющие формирование импульсной характеристики

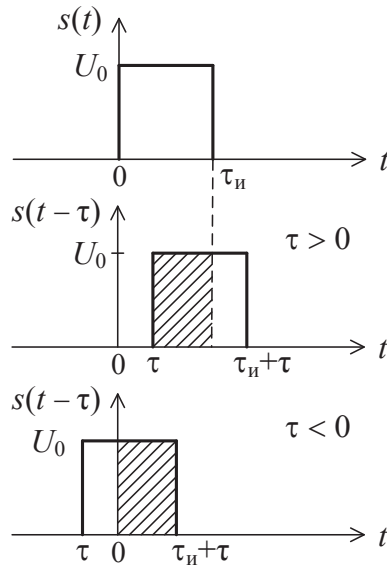


Рис. 2.15. Графики, поясняющие построение АКФ прямоугольного импульса

Если подставить в формулу (1.45) сигнал $s(t)$ и его смещенную копию $s(t - \tau)$ (рис. 2.15), то получится следующий результат:

$$B_s(\tau) = U_0^2 \int_{\tau}^{\tau_{\text{и}}} dt = U_0^2 (\tau_{\text{и}} - \tau) \text{ при } \tau > 0,$$

$$B_s(\tau) = U_0^2 \int_0^{\tau_{\text{и}} + \tau} dt = U_0^2 (\tau_{\text{и}} + \tau) \text{ при } \tau < 0.$$

Или, с учетом четности АКФ, можно записать

$$B_s(\tau) = \begin{cases} U_0^2 \tau_{\text{и}} \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_{\text{и}}} \right), & \tau \in [-\tau_{\text{и}}, \tau_{\text{и}}], \\ 0, & \tau \notin [-\tau_{\text{и}}, \tau_{\text{и}}], \end{cases}$$

Выполнив замену τ на t и сместив АКФ в точку t_0 , получим, что сигнал на выходе согласованного фильтра будет иметь вид, показанный на рис. 2.16, т. е. $s_{\text{вых}}(t) = k B_s(t - t_0)$.

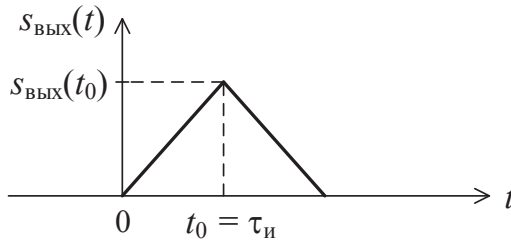


Рис. 2.16. Выходной сигнал фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

Отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра, если на входе присутствует белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 , можно определить по формуле (1.75). Энергию E_s сигнала можно рассчитать по формуле (1.28), для прямоугольного импульса

$$E_s = U_0^2 \int_0^{\tau_{\text{и}}} dt = U_0^2 \tau_{\text{и}}.$$

Тогда отношение сигнал/шум

$$\left(\frac{C}{\Pi} \right)_{\text{согл}} = \frac{U_0^2 \tau_{\text{и}}}{W_0}. \quad (2.12)$$

Из данной формулы видно, что повысить отношение сигнал/шум можно не только за счет увеличения амплитуды сигнала, но и за счет увеличения его длительности.

1.6. Построение квазиоптимального фильтра для прямоугольного импульса

Рассчитать постоянную времени τ_{RC} и частоту среза $\omega_{ср}$ RC -цепи, обеспечивающие квазиоптимальную фильтрацию прямоугольного импульса длительностью $\tau_{и}$ (см. рис. 2.1) на фоне белого шума.

По определению (см. часть I, параграф 4.2), квазиоптимальным называется фильтр более простой конструкции по сравнению с согласованным, который обеспечивает отношение сигнал/шум на выходе, близкое к согласованному. Если сравнить примеры в параграфах 1.1 и 1.5 части II, а именно рис. 2.3 и рис. 2.16, то можно предположить, что RC -цепь при определенных параметрах является квазиоптимальным фильтром для прямоугольного импульса. Определим эти параметры, для этого также воспользуемся примером в параграфе 1.2.

Пиковое отношение сигнал/шум на выходе RC -цепи в случае подачи на вход суммы прямоугольного импульса амплитудой U_0 и длительностью $\tau_{и}$ и белого шума со спектральной плотностью мощности W_0 согласно (1.71), (2.1) и (2.7):

$$\left(\frac{C}{\Pi} \right)_{RC} = \frac{s_{\text{вых}}^2(\tau_{и})}{\sigma_{n_{\text{вых}}}^2} = \frac{U_0^2 \left(1 - e^{-\tau_{и}/\tau_{RC}} \right)^2}{\frac{W_0}{2RC}}.$$

Умножая числитель и знаменатель на $\tau_{и}$, учитывая (2.12), а также то, что постоянная времени RC -цепи $\tau_{RC} = RC$, получаем:

$$\left(\frac{C}{\Pi} \right)_{RC} = \frac{U_0^2 \tau_{и} \left(1 - e^{-\tau_{и}/\tau_{RC}} \right)^2}{\frac{\tau_{и}}{2\tau_{RC}}} = \left(\frac{C}{\Pi} \right)_{\text{согл}} \xi \left(\frac{\tau_{и}}{\tau_{RC}} \right),$$

где $(C/\text{Ш})_{\text{согл}}$ — отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра для прямоугольного импульса, см. (2.12); $\xi(\tau_{\text{и}}/\tau_{RC})$ — вспомогательная функция,

$$\xi\left(\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{RC}}\right) = \frac{\left(1 - e^{-\tau_{\text{и}}/\tau_{RC}}\right)^2}{\frac{\tau_{\text{и}}}{2\tau_{RC}}}.$$

На рис. 2.17 показан график функции $\xi(\tau_{\text{и}}/\tau_{RC})$. Из графика видно, что она достигает максимума при $\tau_{\text{и}}/\tau_{RC} = 1,25$, при этом пиковое отношение сигнал/шум на выходе RC -цепи $(C/\text{Ш})_{RC}$ также будет максимальным и составит 0,814 от отношения сигнал/шум для согласованного фильтра $(C/\text{Ш})_{\text{согл}}$.

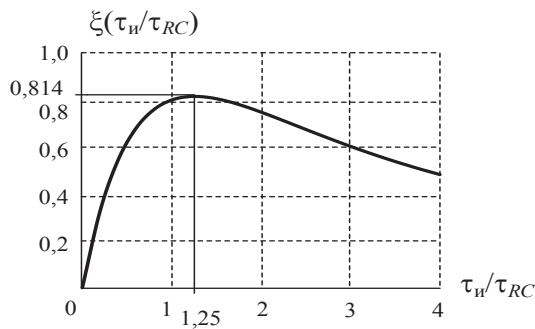


Рис. 2.17. График вспомогательной функции $\xi(\tau_{\text{и}}/\tau_{RC})$

Таким образом, RC -цепь с постоянной времени $\tau_{RC} = RC = \tau_{\text{и}}/1,25$ является квазиоптимальным фильтром для прямоугольного импульса длительностью $\tau_{\text{и}}$. Частота среза цепи $\omega_{\text{ср}} = 1/RC = 1,25/\tau_{\text{и}}$. При этом проигрыш в отношении сигнал/шум по сравнению с согласованным фильтром составит примерно 20 %.

1.7. Построение согласованного фильтра для пачки импульсов

Определить импульсную характеристику фильтра, согласованного с пачкой из двух прямоугольных импульсов разной полярности, показанной на рис. 2.18. Изобразить структурную схему фильтра.

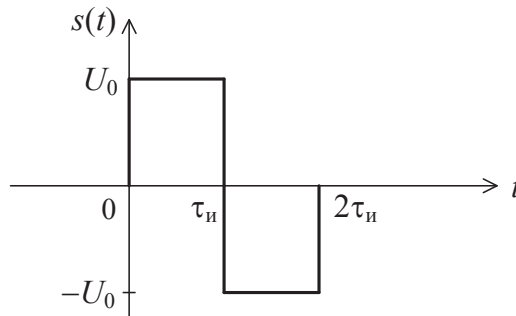


Рис. 2.18. Рисунок к заданию в примере 7

Импульсная характеристика согласованного фильтра $h_{\text{согл}}(t)$ рассчитывается по формуле (1.73), а ее графическое построение иллюстрируется рис. 1.23. Чтобы определить $h_{\text{согл}}(t)$, сигнал $s(t)$ необходимо отобразить зеркально относительно вертикальной оси, а затем масштабировать в k раз и сдвинуть вправо на величину t_0 , большую либо равную длительности сигнала, чтобы выполнялось условие $h_{\text{согл}}(t) = 0$ при $t < 0$. Построение импульсной характеристики согласованного фильтра для пачки из двух прямоугольных импульсов разной полярности показано на рис. 2.19, в данном случае необходимо выбрать $t_0 \geq 2\tau_{и}$.

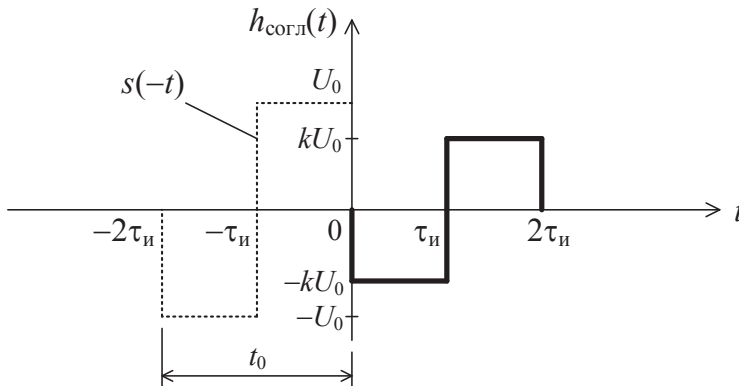


Рис. 2.19. Построение импульсной характеристики фильтра, согласованного с пачкой прямоугольных импульсов

Импульсная характеристика согласованного фильтра $h_{\text{согл}}(t)$ в данном случае должна иметь вид двух прямоугольных импульсов длительностью $\tau_{и}$ разной полярности. Импульсная характеристика в виде

одного прямоугольного импульса формируется с помощью структурной схемы, показанной на рис. 2.13, а временные диаграммы, поясняющие ее работу, показаны на рис. 2.14. Чтобы сформировать импульсную характеристику, показанную на рис. 2.19, необходимо схему на рис. 2.13 дополнить инвертором (-1), который сформирует первый отрицательный импульс, линией задержки ($|-\rangle$) на величину $\tau_{\text{и}}$, которая сформирует второй импульс, и сумматором (Σ). Получившаяся структурная схема показана на рис. 2.20. На ней СФОИ — согласованный фильтр для одиночного импульса, структурная схема которого показана на рис. 2.13.

В общем случае согласованный фильтр для пачки импульсов будет состоять из согласованного фильтра для одиночного импульса (СФОИ), линий задержки и усилителей (или инверторов), причем задержки и коэффициенты усиления необходимо отсчитывать от конца пачки импульсов.

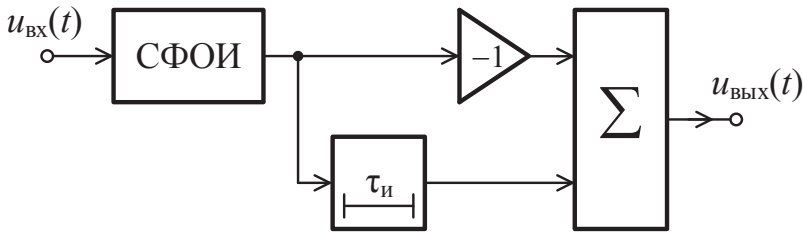


Рис. 2.20. Структурная схема фильтра, согласованного с пачкой из двух импульсов разной полярности

2. Задания для самостоятельного решения

Задание 1

1. Рассчитать комплексный коэффициент передачи цепи $K(j\omega)$ по напряжению, построить график АЧХ, определить частоту среза $\omega_{\text{ср}}$ (для цепей с монотонной АЧХ, варианты 1 и 2) или частоту ω_{max} , на которой АЧХ принимает максимальное значение (для цепей с немонотонной АЧХ, варианты 3–6). Исходные данные приведены на рис. 2.21 и в табл. 2.1–2.3.

2. Рассчитать функцию корреляции случайного процесса на выходе цепи $R_y(\tau)$, построить график нормированной функции корреляции, определить интервал корреляции τ_k , рассчитать дисперсию выходного шума σ_y^2 и эффективное значение σ_y , если на вход цепи подается белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 .

3. Рассчитать односторонний спектр мощности случайного процесса на выходе цепи $F_y(\omega)$ и построить его график, определить эффективную ширину спектра $\Delta\omega_{\text{эфф}}$.

4. Рассчитать отношение сигнал/шум на выходе цепи, если на вход подается сумма $u_{\text{вх}}(t) = s_{\text{вх}}(t) + n_{\text{вх}}(t)$, где $s_{\text{вх}}(t)$ — гармонический сигнал амплитудой U_m и частотой $\omega = k\omega_{\text{ср}}$ (для цепей с монотонной АЧХ) или $\omega = k\omega_{\text{max}}$ (для цепей с немонотонной АЧХ), k — заданный коэффициент; $n_{\text{вх}}(t)$ — белый шум со спектральной плотностью мощности W_0 .

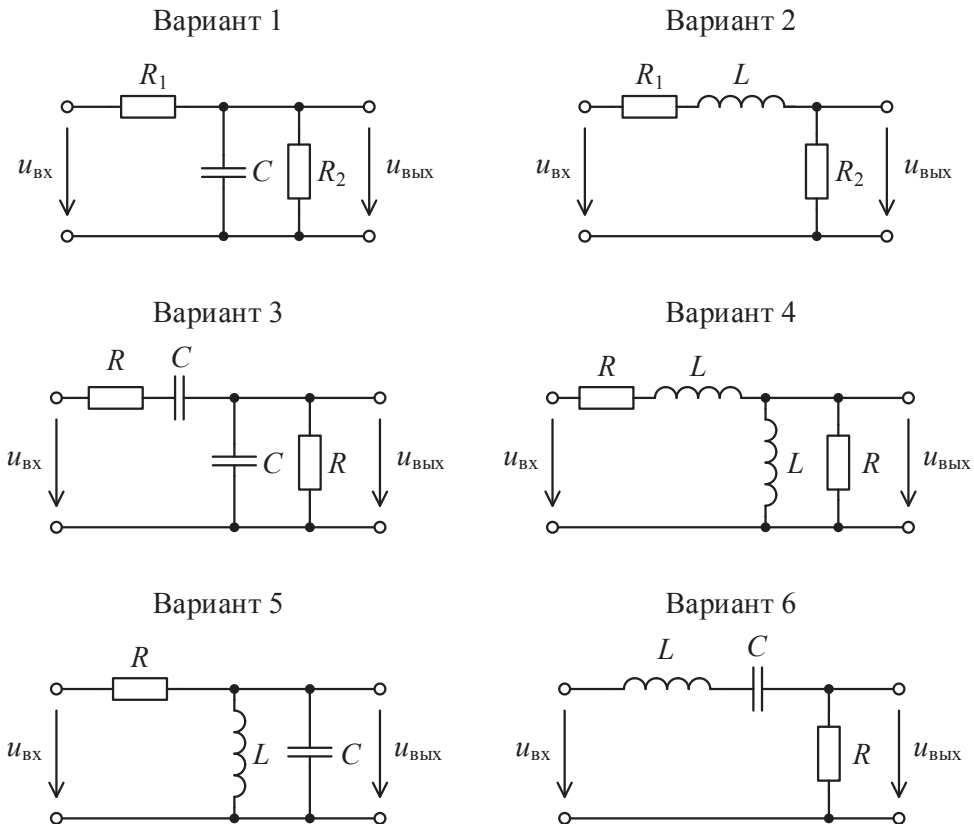


Рис. 2.21. Схемы цепей для задания 1

Таблица 2.1

Числовые данные к вариантам 1, 2

Параметр	Номер подварианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_1 , кОм	1,5	2,4	3,3	4,7	5,6	2,2	5,1	8,2	10	15
R_2 , кОм	8,2	7,5	6,8	5,1	4,3	18	15	12	9,1	5,6
C , нФ (вар. 1)	2,2	3,3	4,7	6,8	8,2	10	15	22	33	47
L , мГн (вар. 2)	120	68	39	22	10	150	82	56	36	18
W_0 , В ² ·с	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
U_m , В	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
k	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2

Таблица 2.2

Числовые данные к вариантам 3, 4

Параметр	Номер подварианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R , кОм	1,2	1,8	2,7	3,3	4,3	5,1	6,8	7,5	8,2	9,1
C , нФ (вар. 3)	3,6	5,6	8,2	15	22	3,3	5,1	6,8	10	15
L , мГн (вар. 4)	4,7	8,2	15	27	39	6,8	12	22	33	47
W_0 , В ² ·с	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
U_m , В	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
k	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	1,5	2,0	2,5	3	3,3

Таблица 2.3

Числовые данные к вариантам 5, 6

Параметр	Номер подварианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R , кОм	1,5	1,8	2,2	2,4	2,7	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8
L , мГн	2,0	4,7	8,2	15	33	1,0	1,5	3,3	5,6	12
C , нФ	8,2	5,6	3,3	1,8	0,91	6,8	4,3	2,2	1,2	0,68
W_0 , В ² ·с	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}

Окончание табл. 2.3

Параметр	Номер подварианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U_m, \text{В}$	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
k	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Задание 2

1. Определить импульсную характеристику фильтра $h_{\text{согл}}(t)$, согласованного с заданным сигналом $s(t)$, построить график $h_{\text{согл}}(t)$. Исходные данные приведены на рис. 2.22 и в табл. 2.4.

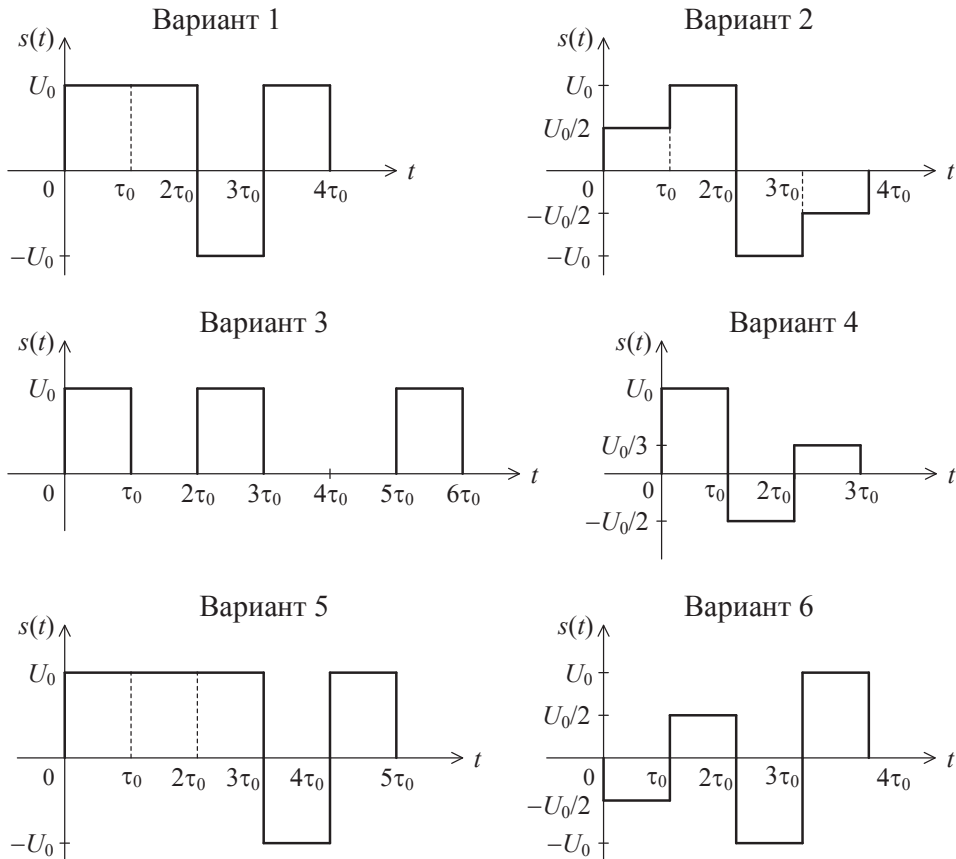


Рис. 2.22. Сигналы для задания 2

Таблица 2.4

Числовые данные к заданию 2

Параметр	Номер подварианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_0 , В	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
τ_0 , мкс	25	20	15	10	5	25	20	15	10	5
W_0 , В ² ·с	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}

2. Изобразить структурную схему согласованного фильтра.
3. Рассчитать и построить график сигнала $s_{\text{вых}}(t)$ на выходе согласованного фильтра, если на его вход подается сигнал $s(t)$.
4. Рассчитать пиковое отношение сигнал/шум на выходе согласованного фильтра, если на его вход подается сумма сигнала $s(t)$ и белого шума со спектральной плотностью мощности W_0 .

ЧАСТЬ III. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

1. Порядок проведения лабораторных работ

Основными целями лабораторного практикума являются экспериментальное подтверждение основных положений теоретической части и приобретение навыков в проведении экспериментальных исследований.

Лабораторные работы выполняются бригадами по два человека. Выполнение каждой лабораторной работы состоит из трех этапов:

- 1) домашняя подготовка;
- 2) проведение экспериментальных исследований в лаборатории в часы, предусмотренные расписанием;
- 3) обработка результатов, составление и сдача отчета.

Во время домашней подготовки необходимо:

- ознакомиться с описаниями лабораторного практикума, исследуемых цепей и лабораторного стенда;
- изучить соответствующие разделы теоретической части;
- выполнить требуемые в домашнем задании расчеты в одном экземпляре на бригаду (расчеты выполняются на отдельных листах бумаги и вкладываются в отчет при его составлении);
- ознакомиться с лабораторным заданием.

Проведению экспериментальных исследований предшествует проверка подготовленности студента. Преподавателю предоставляются полностью оформленные результаты расчетов (в одном экземпляре на бригаду) и отчет по предыдущей работе, после чего проводится проверка теоретической подготовленности каждого студента в форме коллоквиума, собеседования либо тестирования. При удовлетвори-

тельной подготовке (правильно выполненные расчеты и достаточная теоретическая подготовленность) студенты допускаются до выполнения экспериментальной части.

В ходе выполнения экспериментальных исследований студентами составляется черновик (один на бригаду), в который заносятся все полученные в эксперименте данные. Рекомендуется составление черновика в электронном виде на компьютере с использованием электронных таблиц MS Excel или математического пакета Mathcad с последующей обработкой результатов и построением графиков в лаборатории. Работа считается оконченной после просмотра и утверждения преподавателем черновика результатов экспериментальных исследований.

Отчет по лабораторной работе оформляется в одном экземпляре на бригаду на листах формата A4 в печатном виде. Для составления отчета рекомендуется использовать текстовый процессор MS Word. На титульном листе обязательно указывается название и номер работы, фамилия и инициалы преподавателя, фамилии и инициалы студентов, выполнивших работу, номер группы. Отчет должен содержать следующие пункты:

1. Цель работы.
2. Схемы исследуемых цепей.
3. Результаты расчетов, выполненных при подготовке к работе.
4. Результаты эксперимента в виде числовых данных, таблиц, скриншотов или графиков сигналов.
5. Результаты обработки экспериментальных данных: графики и расчеты, построенные и выполненные по результатам эксперимента, таблицы сравнения результатов.
6. Выводы, в которых кратко описывается, что сделано в работе, какие получены результаты, зависимости, приводится анализ того, чем они объясняются, подтверждает ли эксперимент теорию, чем объясняются возможные расхождения.

Сдача отчета состоит в просмотре отчета преподавателем и собеседовании с каждым студентом по тематике лабораторной работы.

2. Описание исследуемых цепей

В лабораторном практикуме изучается прохождение сигнала и шума через следующие электрические цепи.

2.1. RC-цепь первого порядка

Принципиальная схема RC-цепи первого порядка показана на рис. 3.1. Комплексный коэффициент передачи цепи по напряжению

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}, \quad (3.1)$$

где \dot{U}_{m2} , \dot{U}_{m1} — комплексные амплитуды выходного и входного напряжений соответственно.

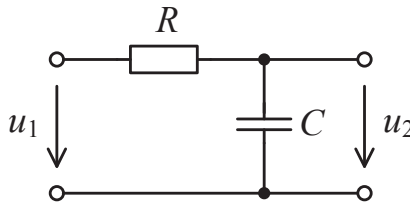


Рис. 3.1. Принципиальная схема RC-цепи первого порядка

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) комплексного коэффициента передачи по напряжению

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}. \quad (3.2)$$

Если вместо угловой частоты ω , выраженной в [рад/с], использовать линейную частоту f , выраженную в [Гц] и при этом учесть, что $\omega = 2\pi f$, то формулы (3.1) и (3.2) приведутся к виду:

$$K(j2\pi f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC},$$

$$K(f) = |K(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}}.$$

График АЧХ комплексного коэффициента передачи по напряжению показан на рис. 3.2. RC-цепь первого порядка является простейшим фильтром нижних частот (ФНЧ), т. к. ее АЧХ $K(\omega) \approx 1$ в области нижних частот $\omega \approx 0$ и $K(\omega)$ монотонно уменьшается при увеличении частоты ω . Частота $\omega_{\text{ср}}$, при которой значение АЧХ $K(\omega)$ уменьшается в $\sqrt{2}$ от максимального значения, называется *частотой среза*, а диа-

пазон частот от 0 до $\omega_{\text{ср}}$ — *полосой пропускания* ФНЧ. Для RC -цепи первого порядка

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{RC} \quad \text{или} \quad f_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\text{ср}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (3.3)$$

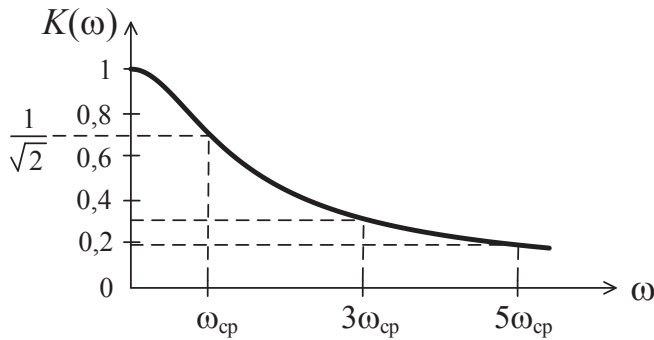


Рис. 3.2. АЧХ RC -цепи первого порядка

2.2. RC -цепь второго порядка

В лабораторном практикуме исследуется RC -цепь второго порядка, образованная путем каскадного соединения двух RC -цепей первого порядка с одинаковыми сопротивлениями R и одинаковыми емкостями C . Принципиальная схема цепи показана на рис. 3.3.

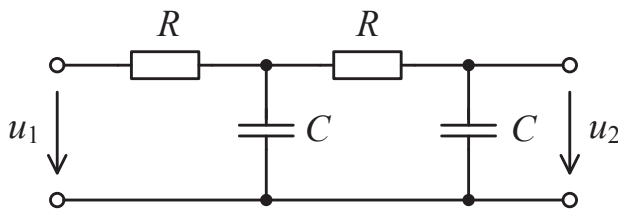


Рис. 3.3. Принципиальная схема RC -цепи второго порядка

Комплексный коэффициент передачи по напряжению RC -цепи второго порядка с одинаковыми сопротивлениями и емкостями

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{1}{(j\omega)^2 (RC)^2 + j\omega 3RC + 1}, \quad (3.4)$$

и его АЧХ

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^4 + 7(\omega RC)^2 + 1}}.$$

На рис. 3.4 показаны АЧХ RC -цепей первого ($n = 1$) и второго ($n = 2$) порядков, n — порядок цепи.

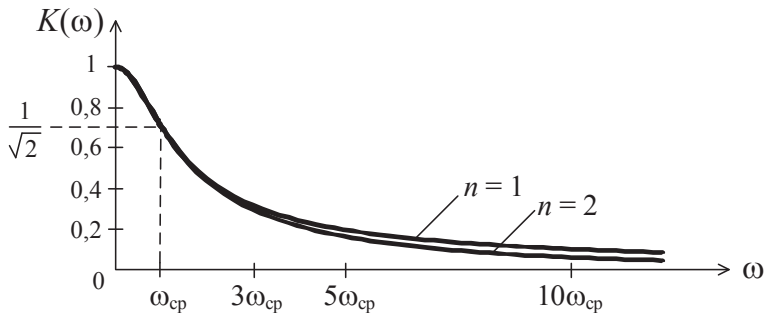


Рис. 3.4. Сравнение АЧХ RC -цепей первого и второго порядков

Так же как и RC -цепь первого порядка, RC -цепь второго порядка является ФНЧ, причем в области частот от 0 примерно до $3\omega_{cp}$ различия в форме АЧХ этих цепей практически отсутствуют. Однако в области частот $\omega \gg \omega_{cp}$ различия становятся более заметными. Из рис. 3.4 видно, что RC -цепь второго порядка будет лучше ослаблять сигналы в области верхних частот $\omega \gg \omega_{cp}$ по сравнению с RC -цепью первого порядка, это объясняется наличием квадратичного слагаемого $(j\omega)^2$ в знаменателе формулы (3.4).

Частота среза RC -цепи второго порядка с одинаковыми сопротивлениями и емкостями рассчитывается по формуле

$$\omega_{cp} = \frac{0,374}{RC} \text{ или } f_{cp} = \frac{\omega_{cp}}{2\pi} = \frac{0,374}{2\pi RC}. \quad (3.5)$$

2.3. Последовательная RLC -цепь

Принципиальная схема последовательной RLC -цепи показана на рис. 3.5. Ее комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{m2}}{\dot{U}_{m1}} = \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2},$$

где ω_0 — резонансная частота цепи, Q — добротность, рассчитываемые по формулам:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ или } f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.6)$$

$$Q = \frac{\rho}{R} \quad (3.7)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ — характеристическое сопротивление.

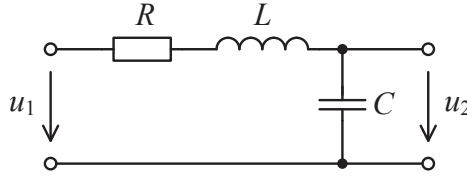


Рис. 3.5. Принципиальная схема последовательной RLC -цепи

Форма АЧХ комплексного коэффициента передачи по напряжению $K(\omega) = |K(j\omega)|$ последовательной RLC -цепи зависит от значения добротности. При $Q = 1/3 \approx 0,33$ АЧХ совпадает по форме с АЧХ RC -цепи второго порядка с $\omega_{cp} = 0,374\omega_0$. При $Q = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ АЧХ соответствует ФНЧ Баттерворта 2-го порядка (максимально плоская АЧХ в диапазоне частот от 0 до ω_{cp} , а при $\omega > \omega_{cp}$ более резкий спад по сравнению с RC -цепью второго порядка), при этом $\omega_{cp} = \omega_0$. АЧХ для значения добротности $Q = 0,707$ показана на рис. 3.6.

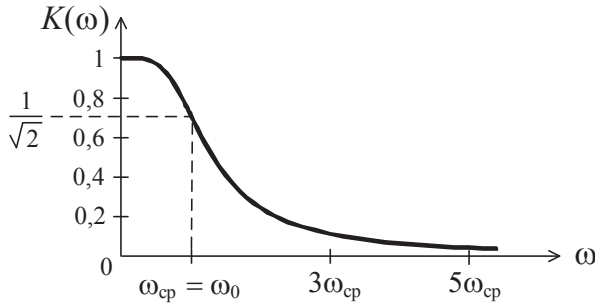


Рис. 3.6. АЧХ последовательной RLC -цепи при $Q = 0,707$

При $0,707 < Q \leq 1,3$ АЧХ также соответствует ФНЧ, но имеет выброс K_{max} . Такие фильтры, имеющие колебания в полосе пропускания, называются фильтрами Чебышева. АЧХ RLC -цепи в этом случае показана на рис. 3.7.

Максимальное значение АЧХ K_{max} и соответствующую ему частоту ω_{max} можно определить по формулам

$$K_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}},$$

$$\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}. \quad (3.8)$$

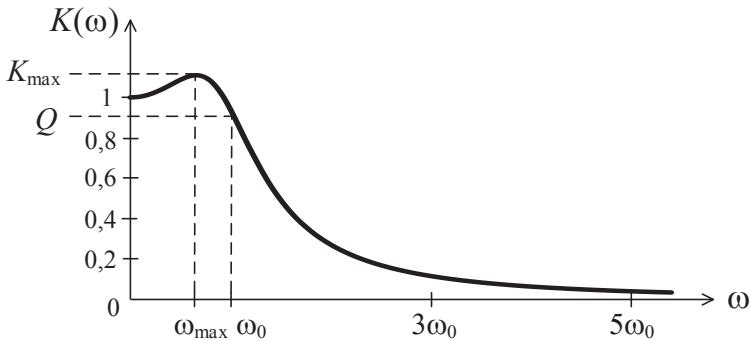


Рис. 3.7. АЧХ последовательной RLC -цепи при $Q > 0,707$

При $Q \gg 1$ АЧХ будет иметь ярко выраженный максимум $K_{\max} \gg 1$ и RLC -цепь превратится в простейший полосовой фильтр с центральной частотой $\omega_{\max} \approx \omega_0$ и полосой пропускания $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

2.4. Фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом

Фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом, подробно описан в части II, в параграфе 1.5. Такой фильтр должен иметь импульсную характеристику в виде смещенной зеркальной масштабной копии сигнала, с которым он согласован. Импульсная характеристика исследуемого фильтра показана на рис. 3.8. Его комплексный коэффициент передачи описывается формулой (2.11). Данный фильтр не может быть реализован с помощью цепей с сосредоточенными параметрами, описанными в главе 1 части I, т. к. его комплексный коэффициент передачи не является дробно-рациональной функцией (1.15). Однако такой фильтр легко реализуется методами цифровой обработки сигналов в виде сумматора отсчетов, импульсная характеристика которого имеет прямоугольную огибающую.

Комплексный коэффициент передачи фильтра (2.11) при $k = 1/\tau_{\text{и}}$ можно привести к виду

$$K(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau_{\text{и}}} \left(e^{j\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right) e^{-j\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} e^{-j\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}},$$

где $\tau_{\text{и}}$ — длительность импульса, с которым фильтр согласован. АЧХ комплексного коэффициента передачи

$$K(\omega) = |K(j\omega)| = \left| \frac{\sin \frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}}{\frac{\omega\tau_{\text{и}}}{2}} \right|.$$

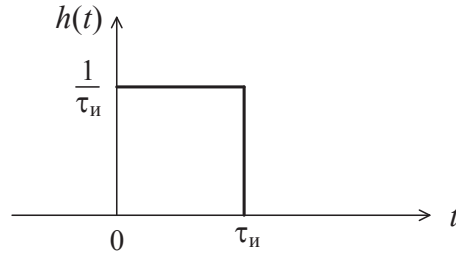


Рис. 3.8. Импульсная характеристика фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом длительностью $\tau_{\text{и}}$

График АЧХ показан на рис. 3.9. АЧХ соответствует ФНЧ и имеет волнообразный характер, при этом частота среза

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{2,8}{\tau_{\text{и}}} \text{ или } f_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\text{ср}}}{2\pi} \approx \frac{0,45}{\tau_{\text{и}}}. \quad (3.9)$$

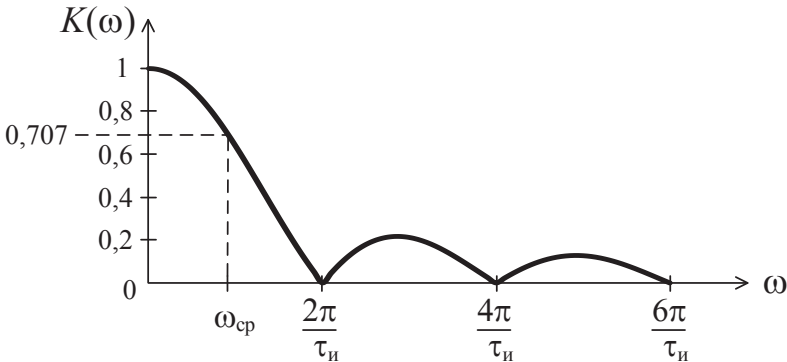


Рис. 3.9. АЧХ фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом длительностью $\tau_{\text{и}}$

3. Описание лабораторного стенда

Лабораторные работы выполняются на персональном компьютере (ПК) на виртуальном лабораторном стенде, разработанном в среде программирования LabVIEW [8]. Лабораторный стенд отображается на экране монитора в виде интерактивной панели управления (ИПУ), при этом его вид максимально приближен к внешнему виду реального лабораторного стенда. Работа реальных измерительных приборов и прохождение сигналов через цепи смоделированы математическими методами с использованием алгоритмов цифровой обработки сигналов с помощью средств LabVIEW.

На ИПУ лабораторного стенда присутствуют следующие приборы и элементы.

Генератор шума

Генератор шума (рис. 3.10) формирует реализации Гауссового шума с равномерной спектральной плотностью мощности в полосе частот от 0 до 250 кГц длительностью 0,1 с.

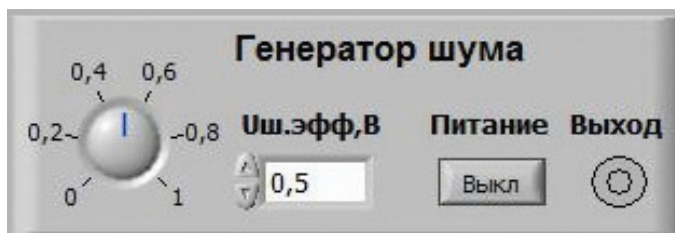


Рис. 3.10. ИПУ генератора шума

На ИПУ генератора шума имеется регулятор эффективного шумового напряжения «**Uш.эфф, В**» ($U_{ш.эфф} = \sqrt{\sigma^2}$, где σ^2 — дисперсия шума), позволяющий изменять $U_{ш.эфф}$ от 0 до 1 В, кнопка включения «**Питание**» с индикацией включенного/выключенного состояния и графическое изображение выходного разъема «**Выход**».

Генератор сигнала

Генератор сигнала (рис. 3.11) формирует реализации детерминированного сигнала длительностью 0,1 с.

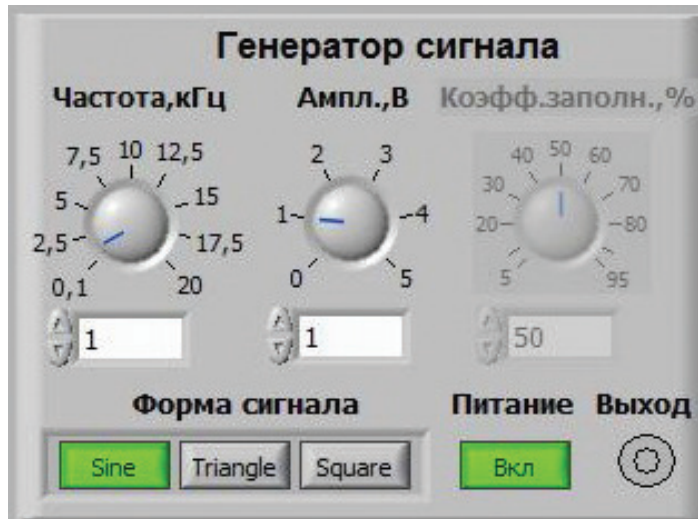


Рис. 3.11. ИПУ генератора сигнала

На ИПУ генератора сигнала расположены регуляторы:

- «**Частота, кГц**», позволяющий изменять частоту сигнала от 100 Гц до 20 кГц с шагом 100 Гц;
- «**Ампл, В**», позволяющий изменять амплитуду сигнала от 0 до 5 В с шагом 0,1 В;
- «**Коэфф.заполн., %**», доступный только для прямоугольных импульсов и позволяющий изменять отношение длительности импульса к периоду в пределах от 5 до 95 % с шагом 1 %.

Кроме того, на ИПУ расположены переключатель формы сигнала «**Форма сигнала**» со следующими режимами: Sine — гармонический сигнал, Triangle — треугольные импульсы, Square — прямоугольные импульсы; кнопка включения «**Питание**» с индикацией включенного/выключенного состояния и графическое изображение выходного разъема «**Выход**».

Исследуемые цепи

На ИПУ исследуемых цепей (рис. 3.12) расположены графические изображения исследуемых цепей, описанных в главе 2 части III.

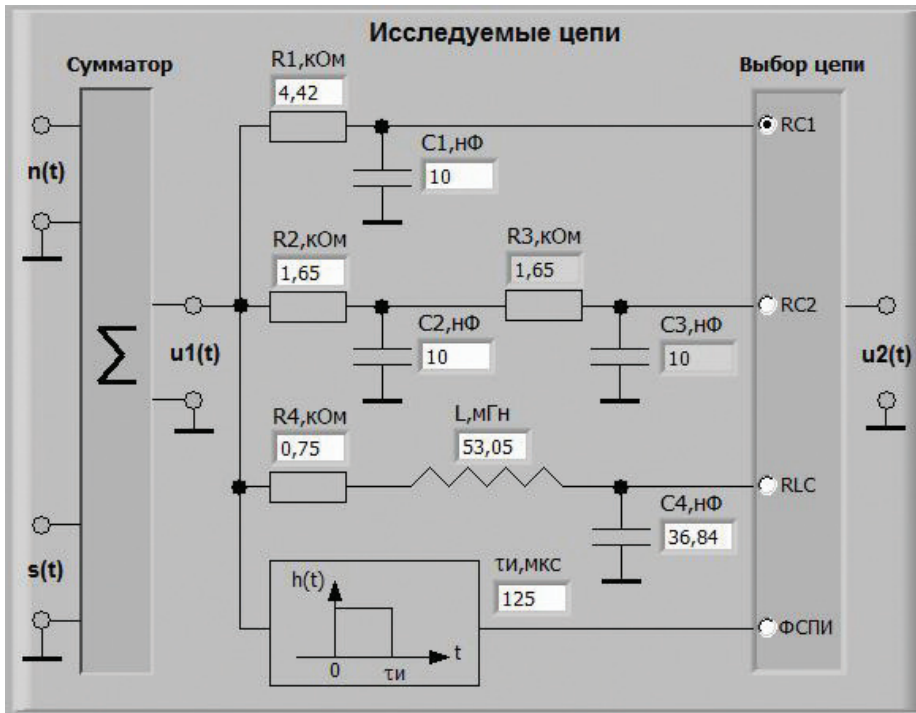


Рис. 3.12. ИПУ исследуемых цепей

Возле каждого элемента цепи расположено поле ввода/вывода, в которое с клавиатуры может быть введено требуемое значение. При этом параметры элементов ограничены следующими значениями:

- R_1 — от 1 до 50 кОм с округлением до 0,01 кОм;
- R_2 — от 1 до 10 кОм с округлением до 0,01 кОм;
- C_1, C_2 — от 1 до 20 нФ с округлением до 0,01 нФ;
- R_4 — от 0,35 до 5 кОм с округлением до 0,01 кОм;
- L — от 1 до 100 мГн с округлением до 0,01 мГн;
- C_4 — от 1 до 100 нФ с округлением до 0,01 нФ;
- $\tau_{и}$ — от 50 до 500 мкс с округлением до 1 мкс.

Параметры элементов R_3 и C_3 доступны только для вывода, они принимают значения, равные R_2 и C_2 соответственно.

На входе исследуемых цепей расположен сумматор, с помощью которого формируется аддитивная смесь $u_1(t) = s(t) + n(t)$ сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$, подаваемая на вход цепей.

Выходы всех цепей подключены к переключателю «Выбор цепи», который имеет четыре положения: $RC1$, $RC2$, RLC и ФСПИ — и по-

звояет выбрать для анализа и измерения выходное напряжение $u_2(t)$ одной из цепей.

Коррелометр

Коррелометр (рис. 3.13) производит измерение и вычисление функции корреляции напряжения, подаваемого на его входные разъемы «Вход» в соответствии с формулой (1.47). В лабораторном стенде на вход коррелометра подается напряжение $u_2(t)$ с выхода выбранной цепи.

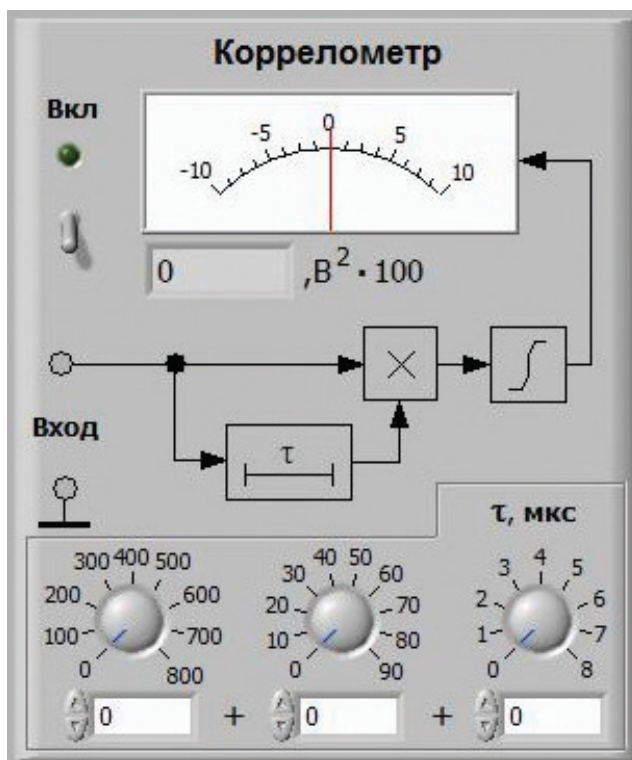


Рис. 3.13. ИПУ коррелометра

Установка задержки τ производится с помощью трех переключателей « τ , мкс», устанавливающих отдельно значения для сотен, десятков и единиц величины задержки. Минимальный шаг изменения задержки равен 2 мкс, а максимальное значение 898 мкс. Результат вычисления функции корреляции для установленного значения τ выводится на стрелочный индикатор и на числовой дисплей. Для удобства изме-

рения результат умножен на 100. Выбор предела измерения стрелочного индикатора производится автоматически.

Слева от стрелочного индикатора расположен тумблер включения корелометра «Вкл» со светодиодом индикации включения.

Анализатор сигналов

Анализатор сигналов (рис. 3.14) является виртуальным прибором, который позволяет наблюдать на графике временную диаграмму выбранного сигнала и измерять его параметры.

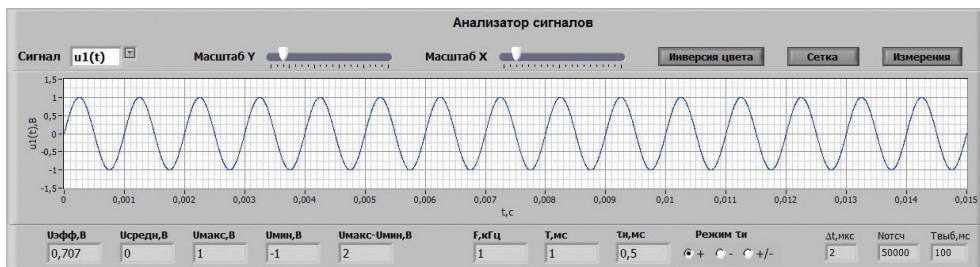


Рис. 3.14. ИПУ анализатора сигналов

В верхней части ИПУ анализатора сигналов над графиком расположены:

- выпадающий список «Сигнал», позволяющий выбрать сигнал для анализа, в списке доступны следующие значения: $n(t)$ — реализация шума, $s(t)$ — реализация сигнала, $u1(t)$ — сумма сигнала и шума, подаваемая на вход цепи, $u2(t)$ — напряжение на выходе цепи;
- регулятор «Масштаб Y», изменяющий пределы по оси напряжений на графике от $\pm 0,5$ до ± 10 В с шагом 0,5 В;
- регулятор «Масштаб X», изменяющий верхний предел по оси времени на графике от 0,005 до 0,1 с шагом 0,005 с; при этом если установлен предел менее 0,1 с, то на график будет выводиться только часть реализации выбранного сигнала, начиная от момента времени $t = 0$;
- кнопки «Инверсия цвета» и «Сетка», управляющие цветом графика и отображением сетки;
- кнопка «Измерения», включающая/выключающая режим измерений.

В нижней части ИПУ под графиком расположены числовые поля, в которых выводятся результаты измерений параметров реализации выбранного сигнала:

- « **$U_{\text{эфф}}, В$** » — эффективное (среднеквадратическое) значение в вольтах;
- « **$U_{\text{средн}}, В$** » — среднее значение в вольтах;
- « **$U_{\text{макс}}, В$** » — максимальное значение в вольтах;
- « **$U_{\text{мин}}, В$** » — минимальное значение в вольтах;
- « **$U_{\text{макс-Умин}}, В$** » — разность максимального и минимального значений в вольтах;
- « **$F, \text{кГц}$** » — частота в килогерцах;
- « **$T, \text{мс}$** » — период в миллисекундах;
- « **$t, \text{мс}$** » — длительность импульса в миллисекундах.

Рядом с числовым полем « **$t, \text{мс}$** » расположен переключатель режимов измерения длительности импульса «**Режим t** » с тремя положениями: «+» — измерение длительности положительного импульса, «–» — измерение длительности отрицательного импульса, «+/-» — измерение длительности импульса по уровню $0,05(U_{\text{макс}} - U_{\text{мин}})$, где $U_{\text{макс}}$ и $U_{\text{мин}}$ — максимальное и минимальное значения сигнала соответственно.

Справа под графиком расположены три числовых поля, в которых выведены параметры анализируемой реализации сигнала: « **$\Delta t, \text{мкс}$** » — интервал дискретизации в микросекундах, «**Нотсч**» — количество отсчетов, « **$T_{\text{выб}}, \text{мс}$** » — длительность реализации (выборки) в миллисекундах.

4. Лабораторная работа № 1

Исследование функций корреляции случайных процессов на выходе линейных электрических цепей

Цель работы

Изучение методов математического описания прохождения случайных сигналов через линейные электрические цепи и экспериментальное измерение характеристик случайных сигналов на выходе линейных электрических цепей.

Домашнее задание

Исходные данные для выполнения домашнего задания приведены в прил. 1 (табл. П1.1). Примеры выполнения расчетов в программе Mathcad приведены в прил. 2.

1. Для RC -цепи первого порядка (см. главу 2 лабораторного практикума) с элементами R_1 и C_1 (см. рис. 3.12):

- а) рассчитайте сопротивление резистора R_1 , используя формулу (3.3) и исходные данные из табл. П1.1;
- б) постройте график АЧХ $K(f)$ в диапазоне от 0 до $5f_{\text{ср}}$;
- в) рассчитайте функцию корреляции случайного процесса на выходе цепи $R(\tau)$, если на вход подается случайный процесс со спектральной плотностью мощности

$$N(f) = \begin{cases} N_0, & 0 \leq f \leq F_B \\ 0, & f < 0, \quad f > F_B \end{cases}, \quad (3.10)$$

где $F_B = 250$ кГц — верхняя частота в спектре входного шума. Для определения N_0 воспользуйтесь формулой

$$U_{\text{ш.эфф}}^2 = N_0 F_B, \quad (3.11)$$

при этом примите эффективное напряжение входного шума $U_{\text{ш.эфф}} = 1$ В;

- г) постройте график нормированной функции корреляции $r(\tau) = R(\tau)/R(0)$; при этом изменяйте τ от 0 и до тех пор, пока $|r(\tau)| > 0,01$;
- д) рассчитайте дисперсию $\sigma^2 = R(0)$, среднеквадратическое (эффективное) значение σ и интервал корреляции τ_k случайного процесса на выходе цепи.

2. Для RC -цепи второго порядка с одинаковыми параметрами элементов $R_2 = R_3 = R$ и $C_2 = C_3 = C$ (см. рис. 3.12) рассчитайте сопротивления резисторов R_2 и R_3 , см. формулу (3.5) и табл. П1.1. Постройте график АЧХ $K(f)$; рассчитайте характеристики случайного процесса на выходе цепи и постройте график нормированной функции корреляции $r(\tau)$ аналогично пп. б–д п. 1.

3. Для RLC -цепи для двух значений добротности Q_1 и Q_2 рассчитайте параметры элементов R_4 , L и C_4 (см. рис. 3.12), для этого воспользуйтесь формулами (3.6), (3.7), а также учтите, что $\rho = 2\pi f_0 L = 1 / 2\pi f_0 C$. Постройте графики АЧХ $K(f)$ в диапазоне f от 0 до $3f_0$. Рассчитайте характеристики случайного процесса на выходе цепи (для Q_1 и Q_2) и постройте графики нормированных функций корреляции $r(\tau)$ аналогично пп. в–д п. 1.



4. Для фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом, используя заданную частоту среза $f_{\text{ср}}$, рассчитайте длительность импульса $\tau_{\text{и}}$, см. формулу (3.9). Рассчитайте и постройте график АЧХ $K(f)$ в диапазоне от 0 до 20 кГц. Рассчитайте характеристики случайного про-

цесса на выходе фильтра и постройте график нормированной функции корреляции $r(\tau)$ аналогично пп. в–д п. 1.

5. Ознакомьтесь с экспериментальным заданием.

Экспериментальное задание

Подготовка к исследованиям

1. Включите питание компьютера, дождитесь загрузки операционной системы. Запустите виртуальный лабораторный стенд, для этого откройте исполняемый файл «signal_and_noise.exe» из папки «Прохождение сигнала и шума через ЛЭЦ/signal_and_noise». Стенд должен запускаться автоматически, при этом кнопка запуска будет недоступной и будет иметь вид , иначе нажмите кнопку  на панели инструментов.

2. На ИПУ исследуемых цепей введите значения параметров элементов цепей R_1 , C_1 , R_2 , C_2 , R_4 (для добротности Q_1), L , C_4 , τ_{II} , рассчитанные в домашнем задании. Проверьте, что $R_3 = R_2$, $C_3 = C_2$.

Проверка АЧХ цепей

1. Убедитесь, что генератор шума выключен (кнопка «Питание» имеет серый цвет, и на ней отображается «Выкл»), иначе выключите генератор шума кнопкой «Питание».

2. Включите генератор сигнала кнопкой «Питание» (кнопка изменит цвет на зеленый, и на ней отобразится «Вкл»). Выберите гармонический сигнал кнопкой Sine в группе кнопок «Форма сигнала», установите частоту сигнала 0,1 кГц и амплитуду 1 В.

3. На анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_1(t)$** . Установите регуляторы: «Масштаб Y » — в такое положение, чтобы сигнал занимал по вертикали не менее половины графика, а «Масштаб X » — в положение, при котором максимальное значение по оси времени t равно 0,01–0,02 с. Включите режим измерений кнопкой «Измерения». Убедитесь по анализатору сигналов, что на вход цепей подается гармоническое напряжение $u_1(t)$ с частотой $f = 0,1$ кГц и амплитудой $U_{mвх} = 1$ В.

4. Проверьте АЧХ RC-цепи первого порядка, для этого:

- на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_2(t)$** ;
- на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «Выбор цепи» в положение $RC1$;

– плавно изменяя частоту генератора сигнала от 0,1 до 20 кГц, убедитесь, что с ростом частоты амплитуда⁴ $U_{m\text{вых}}$ напряжения $u_2(t)$ монотонно уменьшается, т.е. АЧХ $K(f) = U_{m\text{вых}}/U_{m\text{вх}}$ соответствует RC -цепи 1-го порядка (см. рис. 3.2); определите частоту среза $f_{\text{ср}}$, $K(f_{\text{ср}}) = 1/\sqrt{2} = 0,707$, сравните ее с заданной, при несоответствии проверьте значения элементов R_1 и C_1 .

5. Проверьте АЧХ RC -цепи 2-го порядка (см. рис. 3.4), для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение $RC2$ и проделайте действия, аналогичные п. 4.

6. Проверьте АЧХ RLC -цепи для добротности Q_1 (см. рис. 3.6), для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение RLC , проверьте, что в поле « $R4$, кОм» установлено значение R_4 , соответствующее Q_1 , и проделайте действия, аналогичные п. 4.

7. Проверьте АЧХ RLC -цепи для добротности Q_2 (см. рис. 3.7), для этого:

– введите соответствующее значение сопротивления R_4 , рассчитанное в п. 3 домашнего задания;

– плавно изменяя частоту генератора сигнала от 0,1 до 20 кГц, убедитесь, что амплитуда $U_{m\text{вых}}$ напряжения $u_2(t)$ изменяется немонотонно;

– определите максимальное значение АЧХ K_{max} и соответствующую ему частоту f_{max} , определите резонансную частоту f_0 , пользуясь соотношением $K(f_0) = Q$, сравните результаты с исходными данными, при несовпадении проверьте значения элементов R_4 , L , C_4 .

8. Проверьте АЧХ фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом (см. рис. 3.9), для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение «**ФСПИ**» и проделайте действия, аналогичные п. 4 и п. 7. Определите частоту среза $f_{\text{ср}}$ по уровню $K(f_{\text{ср}}) = 0,707$, сравните ее с заданной, при несоответствии проверьте значение $\tau_{\text{и}}$.

Измерение характеристик случайных сигналов на выходе цепей

1. Выключите генератор сигнала и включите генератор шума соответствующими кнопками «**Питание**». Установите эффективное шумовое напряжение генератора шума «**Уш.эфф, В**», равное 1 В.

⁴ Амплитуда равна значению числового поля «**Uмакс, В**» под графиком сигнала при включенном режиме измерений.

2. На анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_1(t)$** . Установите регуляторы: «Масштаб Y » — в такое положение, чтобы сигнал занимал по вертикали не менее половины графика, а «Масштаб X » — в положение, при котором максимальное значение $t_{\text{макс}}$ по оси времени t равно 0,015–0,035 с, $t_{\text{макс}} \approx 1/(12f_{\text{ср}})$, где $f_{\text{ср}}$ — заданная частота среза в [кГц]. Включите режим измерений кнопкой «Измерения». Убедитесь по анализатору сигналов, что на вход цепей подаются реализации случайного процесса $u_1(t)$ с эффективным напряжением $U_{\text{эфф}} = 1$ В. Скопируйте и вставьте в файл график сигнала, для этого щелкните правой клавишей мыши по графику и в открывшемся контекстном меню выберите пункт Copy Data, затем откройте графический редактор или документ MS Word и вставьте рисунок из буфера обмена.

3. Исследуйте характеристики случайного процесса на выходе RC -цепи 1-го порядка, для этого:

а) на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «Выбор цепи» в положение $RC1$;

б) на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_2(t)$** ; установите регулятор «Масштаб Y » в такое положение, чтобы сигнал занимал по вертикали примерно половину графика (с учетом всех выбросов); «Масштаб X » не изменяйте;

в) скопируйте и вставьте в файл график сигнала, как было описано выше в п. 2;

г) включите коррелометр, щелкнув левой клавишей мыши по тумблеру «Вкл» (режим измерений анализатора сигналов можно отключить для повышения быстродействия стенда);

д) изменяя задержку « τ , мкс» с шагом 20 мкс, снимите зависимость показаний коррелометра⁵ $R(\tau)$ от значений τ , результаты занесите в таблицу, форма которой приведена на с. 92, «Обработка результатов»; значения τ необходимо изменять от 0 до тех пор, пока показания коррелометра различимы на уровне нуля.



4. Исследуйте характеристики случайного процесса на выходе RC -цепи 2-го порядка. Для этого установите переключатель «Выбор цепи» в положение $RC2$; скопируйте и вставьте в файл график сигнала («Масштаб Y » и «Масштаб X » не изменяйте); снимите зависимость $R(\tau)$, как это описано выше в п. 3, д.

⁵ При измерении $R(\tau)$ интегрирование производится на интервале времени 0,1 с, равном длительности одной реализации, поэтому показания коррелометра могут отличаться в различных реализациях из-за случайного характера процесса; рекомендуется снимать усредненные показания с числового дисплея.

5. Исследуйте характеристики случайного процесса на выходе RLC -цепи для двух значений добротности Q_1 и Q_2 , для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение RLC и повторите пп. 3, в, д для двух значений сопротивления R_4 , рассчитанных в п. 3 домашнего задания.

6. Исследуйте характеристики случайного процесса на выходе фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом, для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение «**ФСПИ**» и повторите пп. 3, в, д.

Завершение исследований

После просмотра результатов эксперимента преподавателем остановите лабораторный стенд кнопкой  на панели инструментов, закройте окно лабораторного стенда кнопкой , завершите работу операционной системы и выключите компьютер.

Обработка результатов

1. По результатам эксперимента рассчитайте нормированные функции корреляции $r(\tau) = R(\tau)/R(0)$ случайных сигналов на выходе цепей, результаты занесите в таблицу (для каждой цепи отдельная таблица):

τ , мкс	0	20	40	60	80	100	...
$R(\tau)$, В ² ·100							
$r(\tau)$	1						

2. Постройте графики нормированных функций корреляции $r(\tau)$, при этом совместите их следующим образом: на одном рисунке для RC -цепей 1-го и 2-го порядков, на другом рисунке — для RLC -цепи при Q_1 и Q_2 , на третьем рисунке — для Φ СПИ.

3. По результатам эксперимента рассчитайте дисперсии $\sigma^2 = R(0)$ и эффективные значения $\sigma = \sqrt{R(0)}$ случайных сигналов на выходе цепей. Определите интервалы корреляции $\tau_{к\text{эксп}}$ как границу отрезка $[0, \tau_{к\text{эксп}}]$, за пределами которого $|r(\tau)| < 0,1$. Составьте таблицу сравнения результатов:

Параметр		RC1	RC2	RLC		ФСПИ
				Q_1	Q_2	
σ^2, B^2	расч					
	эксп					
σ, B	расч					
	эксп					
$\tau_k, \text{мкс}$	расч					
	эксп					

4. Составьте отчет по результатам работы. Порядок оформления отчета приведен в главе 1 части III.

5. Лабораторная работа № 2

Исследование принципа линейной частотной фильтрации сигнала на фоне шума

Цель работы

Изучение методов математического описания совместного прохождения сигнала и шума через линейные электрические цепи и экспериментальное определение отношения сигнал/шум на выходе линейных электрических цепей.

Домашнее задание

Исходные данные для выполнения домашнего задания приведены в прил. 1. Кроме того, в работе используются параметры элементов цепей, рассчитанные при выполнении домашнего задания к лабораторной работе № 1 (см. с. 88, п. 1–3). Пример выполнения расчетов приведен в прил. 3.

1. Рассчитайте дисперсию случайного процесса на выходе цепей $\sigma_{\text{вых}}^2$, если на вход подается случайный процесс с характеристиками (3.10), (3.11), приведенными в п. 1, на с. 88. Расчеты выполните для следующих цепей:

- RC-цепь первого порядка с элементами R_1, C_1 ;
- RC-цепь 2-го порядка с элементами $R_2 = R_3, C_2 = C_3$;

- RLC -цепь с добротностью Q_1 (ФНЧ Баттерворта 2-го порядка) с элементами R_4 (для Q_1), L , C_4 ;
 - RLC -цепь с добротностью Q_2 с элементами R_4 (для Q_2), L , C_4 .
2. Используя заданное соотношение f/f_{cp} из табл. П1.2, рассчитайте частоту сигнала f . Рассчитайте амплитуду сигнала на входе цепи $U_{mвх}$, при которой входное отношение сигнал/шум $(C/Ш)_{вх} = 1$, воспользовавшись формулой:

$$(C/Ш)_{вх} = \frac{1}{2} \frac{U_{mвх}^2}{U_{ш.эфф.вх}^2},$$

если эффективное напряжение входного шума $U_{ш.эфф.вх} = 1$ В.

Рассчитайте амплитуду сигнала на выходе $U_{mвых}$ цепей, указанных в п. 1, если на вход подается гармонический сигнал с частотой f и амплитудой $U_{mвх}$.

Используя дисперсию выходного шума $\sigma_{вых}^2$ из п. 1, рассчитайте отношение сигнал/шум $(C/Ш)_{вых}$ на выходе цепей, указанных в п. 1, по формуле:

$$(C/Ш)_{вых} = \frac{1}{2} \frac{U_{mвых}^2}{\sigma_{вых}^2}. \quad (3.12)$$

3. Рассчитайте частоту f_{max} , на которой наблюдается максимальное значение коэффициента передачи RLC -цепи при добротности $Q = Q_2$, используя формулу (3.8). Повторите расчеты отношения сигнал/шум на выходе цепей, указанных в п. 1, для частоты входного гармонического сигнала f_{max} и амплитуды $U_{mвх}$.

4. Рассчитайте частоты сигналов f_1, f_2, f_3 . Для стендов с нечетными номерами

$$f_1 = 0,1f_{cp}, \quad f_2 = 0,5f_{cp}, \quad f_3 = f_{cp},$$

а для стендов с четными номерами

$$f_1 = 0,7f_{cp}, \quad f_2 = f_{cp}, \quad f_3 = 1,2f_{cp}.$$

Считая, что на вход цепи подается сумма гармонических колебаний с частотами f_1, f_2, f_3 , определите амплитуды этих колебаний $U_{mвх1}, U_{mвх2}, U_{mвх3}$, обеспечивающие входное отношение сигнал/шум $(C/Ш)_{вх} = 1$, при этом амплитуды колебаний примите одинаковыми, $U_{mвх1} = U_{mвх2} = U_{mвх3}$, и воспользуйтесь формулой:

$$(C/Ш)_{\text{вх}} = \frac{1}{2} \frac{(U_{\text{мвх1}}^2 + U_{\text{мвх2}}^2 + U_{\text{мвх3}}^2)}{U_{\text{ш.эфф.вх}}^2} = \frac{3}{2} \frac{U_{\text{мвх1}}^2}{U_{\text{ш.эфф.вх}}^2},$$

где $U_{\text{ш.эфф.вх}} = 1 \text{ В}$ — эффективное напряжение входного шума.

Рассчитайте амплитуды сигналов $U_{\text{мвых1}}$, $U_{\text{мвых2}}$, $U_{\text{мвых3}}$ на выходе цепей, указанных в п. 1, если на вход подается сумма колебаний с частотами f_1, f_2, f_3 с амплитудами $U_{\text{мвх1}} = U_{\text{мвх2}} = U_{\text{мвх3}}$.



Используя дисперсию выходного шума $\sigma_{\text{вых}}^2$ из п. 1, рассчитайте отношение сигнал/шум $(C/Ш)_{\text{вых}}$ на выходе цепей, указанных в п. 1, по формуле:

$$(C/Ш)_{\text{вых}} = \frac{1}{2} \frac{(U_{\text{мвых1}}^2 + U_{\text{мвых2}}^2 + U_{\text{мвых3}}^2)}{\sigma_{\text{вых}}^2}. \quad (3.13)$$

5. Ознакомьтесь с экспериментальным заданием.

Экспериментальное задание

Подготовка к исследованиям

1. Включите питание компьютера, дождитесь загрузки операционной системы. Запустите виртуальный лабораторный стенд, для этого откройте исполняемый файл «signal_and_noise.exe» из папки «Прхождение сигнала и шума через ЛЭЦ/signal_and_noise». Стенд должен запускаться автоматически, при этом кнопка запуска будет недоступной и будет иметь вид , иначе нажмите кнопку  на панели инструментов.

2. На ИПУ исследуемых цепей введите значения параметров элементов R_1 , C_1 , R_2 , C_2 , R_4 (для добротности Q_1), L , C_4 , рассчитанные в домашнем задании к лабораторной работе № 1 (см. с. 87). Проверьте, что $R_3 = R_2$, $C_3 = C_2$.

Измерение АЧХ цепей

1. Убедитесь, что генератор шума выключен (кнопка «Питание» имеет серый цвет, и на ней отображается «Выкл»), иначе выключите генератор шума кнопкой «Питание».

2. Включите генератор сигнала кнопкой «Питание» (кнопка изменит цвет на зеленый, и на ней отобразится «Вкл»). Выберите гармонический сигнал кнопкой Sine в группе кнопок «Форма сигнала», установите частоту сигнала 0,1 кГц и амплитуду 1 В.

3. На анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение $u1(t)$. Установите регуляторы: «Масштаб Y » — в такое положение, чтобы сигнал занимал по вертикали не менее половины графика, а «Масштаб X » — в положение, при котором максимальное значение по оси времени t равно 0,01–0,02 с. Включите режим измерений кнопкой «Измерения». Убедитесь по анализатору сигналов, что на вход цепей подается гармоническое напряжение $u_1(t)$ с частотой $f = 0,1$ кГц и амплитудой $U_{mвх} = 1$ В.

4. Измерьте АЧХ RC -цепи 1-го порядка, для этого:

- на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение $u2(t)$;
- на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «Выбор цепи» в положение $RC1$;
- изменяя частоту генератора сигнала от 0,1 кГц примерно до $5f_{ср}$ ($f_{ср}$ — заданная частота среза) с шагом 0,3–1 кГц в полосе пропускания и 1–2 кГц за пределами полосы пропускания, снимите зависимость амплитуды $U_{mвых}$ выходного напряжения $u_2(t)$ (по значению поля «**Умакс, В**» на анализаторе сигналов) от частоты, результаты занесите в таблицу:

f , кГц	0,1	0,5	1	1,5	2	...
$U_{mвых}$, В						

5. Измерьте АЧХ RC -цепи 2-го порядка, для этого установите переключатель «Выбор цепи» в положение $RC2$ и повторите действия, аналогичные п. 4.

6. Измерьте АЧХ RLC -цепи (при значении R_4 , соответствующем добротности Q_1), для этого установите переключатель «Выбор цепи» в положение « RLC » и повторите действия, аналогичные п. 4.

7. Измерьте АЧХ RLC -цепи для добротности Q_2 . Для этого введите в поле « $R4$, кОм» соответствующее значение сопротивления R_4 , рассчитанное в домашнем задании к лабораторной работе № 1. Убедитесь, что переключатель «Выбор цепи» установлен в положение RLC , и повторите действия, аналогичные п. 4, шаг изменения частоты возьмите переменный, чтобы определить частоту f_{max} , соответствующую максимуму АЧХ.

8. Постройте (по возможности на одном рисунке) графики АЧХ цепей. При этом учтите, что АЧХ $K(f) = U_{mвых}/U_{mвх}$. Если $U_{mвх} = 1$ В, то график $K(f)$ совпадет с графиком $U_{mвых}(f)$. Убедитесь, что эти графики со-

ответствуют цепям, описанным в главе 2 части III. Проверьте частоту среза $f_{\text{ср}}$, $K(f_{\text{ср}}) = 0,707$, для RC -цепей и RLC -цепи при $Q = Q_1$ и частоту f_{max} для RLC -цепи при $Q = Q_2$. При несоответствиях формы АЧХ или частот $f_{\text{ср}}$, f_{max} заданию проверьте параметры элементов.

Измерение характеристик шума на выходе цепей

1. Выключите генератор сигнала и включите генератор шума соответствующими кнопками «Питание». Установите эффективное шумовое напряжение генератора шума «**Уш.эфф, В**», равное 1 В.

2. На анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_1(t)$** . Установите «Масштаб Y » таким образом, чтобы сигнал занимал по вертикали не менее половины графика. Убедитесь по анализатору сигналов, что на вход цепей подается шумовой сигнал $u_1(t)$ с эффективным напряжением $U_{\text{эфф}} = 1$ В.

3. Измерьте эффективное шумовое напряжение на выходе цепей. Для этого на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_2(t)$** , затем устанавливая переключатель «Выбор цепи» в положения $RC1$, $RC2$, RLC , снимите усредненные показания с поля «**Уэфф, В**» на анализаторе сигналов, результаты занесите в строку $\sigma_{\text{вых}}$ приведенной ниже таблицы. Для RLC -цепи измерения проведите для двух значений R_4 , соответствующих добротностям Q_1 и Q_2 .

Цепь			$RC1$	$RC2$	$RLC(Q_1)$	$RLC(Q_2)$
$\sigma_{\text{вых}}, \text{В}$						
Частота	f	$U_{\text{твых}}, \text{В}$				
	f_{max}	$U_{\text{твых}}, \text{В}$				
	f_1	$U_{\text{твых1}}, \text{В}$				
	f_2	$U_{\text{твых2}}, \text{В}$				
	f_3	$U_{\text{твых3}}, \text{В}$				

Измерение амплитуды однтонального сигнала на выходе цепей

1. Выключите генератор шума и включите генератор сигнала соответствующими кнопками «Питание». Установите частоту f и амплитуду $U_{\text{твх}}$ на генераторе сигнала, рассчитанные в п. 2 домашнего задания (значения округлите с точностью 0,1 кГц и 0,1 В).

2. На анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение $u1(t)$. Убедитесь по анализатору сигналов, что на вход цепей подается гармонический сигнал $u_1(t)$ с требуемыми частотой f и амплитудой $U_{\text{вх}}$.

3. Измерьте амплитуду сигнала $U_{\text{твых}}$ на выходе цепей. Для этого на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение $u2(t)$, затем устанавливая переключатель «Выбор цепи» в положения $RC1$, $RC2$, RLC (для двух значений R_4 , соответствующих добротностям Q_1 и Q_2), снимите показания с поля «Умакс, В» на анализаторе сигналов, результаты занесите в таблицу, приведенную на с. 97.

4. На генераторе сигнала установите частоту f_{max} , рассчитанную в п. 3 домашнего задания (значение округлите до 0,1 кГц, амплитуду сигнала $U_{\text{твых}}$ не изменяйте). Повторите измерения амплитуды сигнала на выходе цепей $U_{\text{твых}}$ аналогично предыдущему пункту, результаты занесите в приведенную на с. 97 таблицу.

Измерение амплитуд составляющих сложного сигнала на выходе цепей

1. На генераторе сигнала установите частоту f_1 и амплитуду $U_{\text{твх1}}$, рассчитанные в п. 4 домашнего задания (значения округлите с точностью 0,1 кГц и 0,1 В).

2. Проверьте установленные параметры по анализатору сигналов, выбрав в выпадающем списке «Сигнал» значение $u1(t)$.

3. Измерьте амплитуду сигнала $U_{\text{твых1}}$ на выходе цепей. Для этого в выпадающем списке «Сигнал» на анализаторе сигналов выберите значение $u2(t)$, затем, устанавливая переключатель «Выбор цепи» в положения $RC1$, $RC2$, RLC (для двух значений R_4 , соответствующих добротностям Q_1 и Q_2), снимите показания с поля «Умакс, В» на анализаторе сигналов, результаты занесите в таблицу, приведенную на с. 97.

4. Установите на генераторе сигнала частоту f_2 , рассчитанную в п. 4 домашнего задания. Амплитуду не меняйте ($U_{\text{твх1}} = U_{\text{твх2}} = U_{\text{твх3}}$, см. п. 4 домашнего задания). Измерьте амплитуду сигнала $U_{\text{твых2}}$ на выходе цепей аналогично предыдущему пункту, результаты занесите в таблицу.

5. Установите на генераторе сигнала частоту f_3 , рассчитанную в п. 4 домашнего задания. Измерьте амплитуду выходного сигнала $U_{\text{твых3}}$ на выходе цепей аналогично тому, как это описано в предыдущих пунктах, результаты занесите в таблицу.

Изучение временных диаграмм смеси сигнала и шума



1. Включите генератор шума кнопкой **«Питание»**. Установите эффективное шумовое напряжение генератора шума **«Уш.эфф, В»**, равное 1 В. На генераторе сигнала установите частоту f_{\max} и амплитуду $U_{\text{твх}}$, рассчитанные в п. 3 и п. 2 домашнего задания (значения округлите с точностью 0,1 кГц и 0,1 В).

2. На анализаторе сигналов в выпадающем списке **«Сигнал»** выберите значение **u1(t)**. Установите регулятор **«Масштаб Y»** таким образом, чтобы сигнал занимал по вертикали не менее половины графика, а **«Масштаб X»** — таким образом, чтобы максимальное значение по оси времени t составляло 0,005–0,01 с. Убедитесь, что на вход цепей подается сумма сигнала и шума. Скопируйте и вставьте в файл график сигнала, для этого щелкните правой клавишей мыши по графику и в открывшемся контекстном меню выберите пункт Copy Data, затем откройте графический редактор или документ MS Word и вставьте рисунок из буфера обмена.

3. В выпадающем списке **«Сигнал»** выберите значение **u2(t)**. Установите переключатель **«Выбор цепи»** в положение $RC1$. Измените **«Масштаб Y»** таким образом, чтобы сигнал занимал по вертикали не менее половины графика. Скопируйте и вставьте в файл график напряжения на выходе RC -цепи 1-го порядка, как было описано выше.

4. Повторите копирование графиков выходного напряжения для всех исследуемых цепей, устанавливая переключатель **«Выбор цепи»** в положения $RC2$, RLC (для двух значений R_4 , соответствующих добротностям Q_1 и Q_2), при необходимости откорректируйте **«Масштаб Y»** на анализаторе сигнала, чтобы сигнал не выходил за пределы графика.

Завершение исследований

После просмотра результатов эксперимента преподавателем остановите лабораторный стенд кнопкой  на панели инструментов, закройте окно лабораторного стенда кнопкой , завершите работу операционной системы и выключите компьютер.

Обработка результатов

1. По результатам предыдущих параграфов экспериментального задания рассчитайте отношение сигнал/шум на выходе исследуемых цепей для трех случаев:

а) на вход подается смесь гармонического сигнала частотой f и шума — для расчета использовать формулу (3.12);

б) на вход подается смесь гармонического сигнала частотой f_{\max} и шума — для расчета использовать формулу (3.12);

в) на вход подается смесь сложного сигнала в виде суммы гармонических составляющих с частотами f_1, f_2, f_3 и шума — для расчета использовать формулу (3.13).

Составьте таблицу сравнения результатов:

Цепь			$RC1$	$RC2$	$RLC(Q_1)$	$RLC(Q_2)$
(С/Ш) _{вых}	Гарм.сигн. f	расч				
		эксп				
	Гарм.сигн. f_{\max}	расч				
		эксп				
	Сложн.сигн. f_1, f_2, f_3	расч				
		эксп				

2. Составьте отчет по результатам работы. Порядок оформления отчета приведен в главе 1 части III.

6. Лабораторная работа № 3

Исследование методов фильтрации импульсного сигнала на фоне шума

Цель работы

Изучение принципа оптимальной линейной фильтрации импульсного сигнала и экспериментальное исследование прохождения смеси импульсного сигнала и шума через различные типы фильтров.

Домашнее задание

Исходные данные для выполнения домашнего задания приведены в прил. 1. Кроме того, в работе используются параметры элементов цепей, рассчитанные при выполнении домашнего задания

к лабораторной работе № 1. Пример выполнения расчетов приведен в прил. 4.

1. Рассчитайте длительность прямоугольного импульса (рис. 3.15) τ_0 , исходя из условия $\tau_0 = 1/f_{\text{ср}}$, где $f_{\text{ср}}$ — заданная частота среза цепей из табл. П1.1. Рассчитайте амплитуду импульса U_0 , исходя из условия:

$$(C/\text{Ш})_{\text{вх}} = \frac{U_0^2}{U_{\text{ш.эфф.вх}}^2},$$

где $(C/\text{Ш})_{\text{вх}}$ — отношение сигнал/шум на входе, заданное в табл. П1.3; $U_{\text{ш.эфф.вх}} = 1 \text{ В}$ — эффективное напряжение входного шума. Рассчитайте и постройте график амплитудного спектра $|S(f)| = |S(\omega)|_{\omega=2\pi f}$ прямоугольного импульса (рис. 3.15).

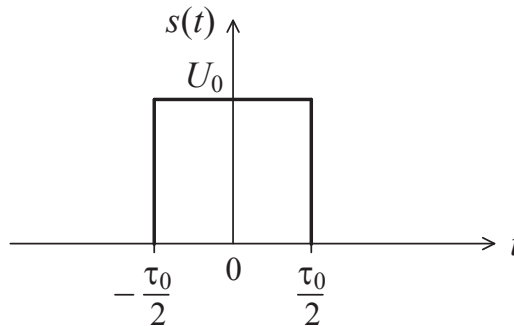


Рис. 3.15. Симметричный прямоугольный видеоимпульс

2. Рассчитайте пиковое отношение сигнал/шум на выходе RC -цепи первого порядка с частотой среза $f_{\text{ср}}$, если на ее вход подается сумма прямоугольного импульса и шума, для этого:

- рассчитайте сигнал на выходе RC -цепи первого порядка с элементами R_1 , C_1 , значения которых были определены в домашнем задании к лабораторной работе № 1, если на вход подается прямоугольный импульс $s(t)$, показанный на рис. 3.15 с параметрами U_0 и τ_0 , определенными в п. 1; для расчета используйте спектральный или временной метод (импульс $s(t)$ можно сместить вправо на $\tau_0/2$); определите пиковое значение выходного сигнала $U_{\text{пик}}$;

- рассчитайте дисперсию шума $\sigma_{\text{вых}}^2$ на выходе RC -цепи первого порядка с элементами R_1 , C_1 , если на вход подается случайный процесс с характеристиками (3.10), (3.11), заданными в п. 1, в домашнем задании к лабораторной работе № 1 (см. с. 88);

– рассчитайте пиковое отношение сигнал/шум на выходе цепи по формуле;

$$(C/\Pi)_{\text{пик}} = \frac{U_{\text{пик}}^2}{\sigma_{\text{вых}}^2}. \quad (3.14)$$

3. Рассчитайте пиковое отношение сигнал/шум на выходе RC -цепи второго порядка с элементами $R_2 = R_3 = R$ и $C_2 = C_3 = C$, значения которых были определены в домашнем задании к лабораторной работе № 1. Методика расчета аналогична методике, описанной выше в п. 2.

4. Рассчитайте пиковое отношение сигнал/шум на выходе RLC -цепи с элементами R_4 (для добротности Q_1), L , C_4 , значения которых были определены в домашнем задании к лабораторной работе № 1. Методика расчета аналогична методике, описанной выше в п. 2.

5. Рассчитайте пиковое отношение сигнал/шум на выходе фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом $s(t)$, для этого воспользуйтесь формулами (1.75), (1.28). Параметры входного сигнала и шума примите такими же, как в п. 2.

6. Рассчитайте пиковое отношение сигнал/шум на выходе квазиоптимального фильтра (см. часть II, параграф 1.6), приняв параметры входного сигнала и шума такими же, как в п. 2, для этого:

– рассчитайте постоянную времени RC -цепи $\tau_{RC\text{опт}}$, при которой обеспечивается квазиоптимальная фильтрация прямоугольного импульса, $\tau_{RC\text{опт}} = RC = \tau_0 / 1,25$; рассчитайте оптимальное сопротивление $R_{1\text{опт}}$, если емкость цепи равна C_1 ;

– рассчитайте частоту среза RC -цепи $f_{\text{ср\опт}} = 1 / (2\pi\tau_{RC\text{опт}})$;

– рассчитайте пиковое значение выходного сигнала $U_{\text{пик}}$, воспользовавшись формулой (2.1);

– рассчитайте дисперсию шума $\sigma_{\text{вых}}^2$ на выходе RC -цепи первого порядка с элементами $R_{1\text{опт}}$, C_1 ;



– рассчитайте отношение сигнал/шум по формуле (3.14).

7. Ознакомьтесь с экспериментальным заданием.

Экспериментальное задание

Подготовка к исследованиям

1. Включите питание компьютера, дождитесь загрузки операционной системы. Запустите виртуальный лабораторный стенд, для этого откройте исполняемый файл «signal_and_noise.exe» из папки «Про-

хождение сигнала и шума через ЛЭЦ/signal_and_noise». Стенд должен запускаться автоматически, при этом кнопка запуска будет недоступной и будет иметь вид , иначе нажмите кнопку  на панели инструментов.

2. На ИПУ исследуемых цепей введите значения параметров элементов R_1 , C_1 , R_2 , C_2 , R_4 (для добротности Q_1), L , C_4 , рассчитанные в домашнем задании к лабораторной работе № 1 и значение $\tau_{\text{и}} = \tau_0$, где τ_0 — длительность импульса, рассчитанная в п. 1 домашнего задания.

Измерение АЧХ цепей

1. Убедитесь, что генератор шума выключен (кнопка «Питание» имеет серый цвет, и на ней отображается «Выкл»), иначе выключите генератор шума кнопкой «Питание».

2. Включите генератор сигнала кнопкой «Питание» (кнопка изменит цвет на зеленый, и на ней отобразится «Вкл»). Выберите гармонический сигнал кнопкой Sine в группе кнопок «Форма сигнала», установите частоту сигнала 0,1 кГц и амплитуду 1 В.

3. На анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение $u_1(t)$. Установите регулятор «Масштаб Y» в такое положение, чтобы сигнал занимал по вертикали не менее половины графика, регулятор «Масштаб X» — в положение, при котором максимальное значение по оси времени t равно 0,01–0,02 с. Включите режим измерений кнопкой «Измерения». Убедитесь по анализатору сигналов, что на вход цепей подается гармоническое напряжение $u_1(t)$ с частотой $f = 0,1$ кГц и амплитудой $U_{\text{мвх}} = 1$ В.

4. Измерьте АЧХ RC-цепи 1-го порядка, для этого:

- на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение $u_2(t)$;
- на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «Выбор цепи» в положение RC1;
- изменяя частоту генератора сигнала от 0,1 кГц примерно до $5f_{\text{ср}}$ ($f_{\text{ср}}$ — заданная частота среза) с шагом 0,3–1 кГц в полосе пропускания ($f \leq f_{\text{ср}}$) и 1–2 кГц за пределами полосы пропускания ($f > f_{\text{ср}}$), снимите зависимость амплитуды $U_{\text{мвых}}$ выходного напряжения $u_2(t)$ (по значению поля «Умакс, В» на анализаторе сигналов) от частоты, результаты занесите в таблицу:

f , кГц	0,1	0,5	1	1,5	2	...
$U_{\text{твых}}$, В						

5. Измерьте АЧХ RC -цепи второго порядка, для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение $RC2$ и повторите действия из п. 4.

6. Измерьте АЧХ RLC -цепи (при значении R_4 , соответствующем добротности Q_1), для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение RLC и повторите действия из п. 4.

7. Измерьте АЧХ фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом. Для этого установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение «**ФСПИ**» и, изменяя частоту генератора сигнала в том же диапазоне частот, что и в п. 4, снимите зависимость $U_{\text{твых}}(f)$, шаг изменения частоты возьмите переменный, равный 0,5–1,5 кГц, чтобы определить максимумы и минимумы АЧХ. Результаты занесите в таблицу, аналогичную таблице в п. 4.

8. Постройте (по возможности на одном рисунке) графики АЧХ цепей $K(f) = U_{\text{твых}}/U_{\text{твх}}$. При этом учтите, что если $U_{\text{твх}} = 1$ В, то график $K(f)$ совпадет с графиком $U_{\text{твых}}(f)$. Убедитесь, что графики АЧХ RC -цепей соответствуют рис. 3.2, 3.4, график АЧХ RLC -цепи соответствует рис. 3.6, а график АЧХ фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом, совпадает с амплитудным спектром импульса $|S(f)|$, построенным в п. 1 домашнего задания.

Исследование прохождения сигнала и шума через цепи

1. Исследуйте прохождение прямоугольного импульса и шума через RC -цепь первого порядка с частотой среза $f_{\text{ср}} = 1/\tau_0$ (где τ_0 — длительность импульса), для этого:

а) на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение $RC1$;

б) выключите генератор шума и включите генератор сигнала соответствующими кнопками «**Питание**»; на генераторе сигнала установите следующие параметры: «**Форма сигнала**» — Square; «**Частота, кГц**» — если $\tau_0 \leq 250$ мкс, то «1», если $\tau_0 > 250$ мкс, то «0,5» (где τ_0 — длительность импульса, рассчитанная в п. 1 домашнего задания); «**Ампл., В**» — значение, равное $U_0/2$ (где U_0 — амплитуда импульса, рассчитанная в п. 1 домашнего задания); «**Коэфф.заполн., %**» — значение, рассчитанное по формуле:

$$D, \% = \frac{\tau_0}{T} \cdot 100,$$

T — период повторения, $T = 1/f$, т.е. при $f = 1$ кГц $T = 1$ мс, а при $f = 0,5$ кГц $T = 2$ мс;

в) на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_1(t)$** ; установите регулятор «Масштаб Y » в такое положение, чтобы сигнал занимал по вертикали примерно половину графика, а «Масштаб X » — в положение, при котором на графике отображается 5–10 периодов сигнала; убедитесь по анализатору сигналов, что на вход цепей подается последовательность прямоугольных импульсов длительностью τ_0 с разностью между максимальным и минимальным значениями ($U_{\text{макс}} - U_{\text{мин}}$), равной амплитуде U_0 , рассчитанной в п. 1 домашнего задания;

г) на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_2(t)$** ; измерьте пиковое значение сигнала $U_{\text{пик}}$ по значению поля « **$U_{\text{макс}} - U_{\text{мин}}$, В**», результаты занесите в таблицу, форма которой приведена на с. 106, «Обработка результатов»; скопируйте и вставьте в файл график сигнала, для этого щелкните правой клавишей мыши по графику и в открывшемся контекстном меню выберите пункт Copy Data, затем откройте графический редактор или документ MS Word и вставьте рисунок из буфера обмена;

д) выключите генератор сигнала и включите генератор шума соответствующими кнопками «Питание»; на генераторе шума установите эффективное шумовое напряжение « **$U_{\text{ш.эфф}}$, В**», равное 1 В; по анализатору сигналов убедитесь, что на выходе цепи наблюдается реализация шума $u_2(t)$, и измерьте среднеквадратическое (эффективное) значение шума $\sigma_{\text{вых}}$ по значению поля « **$U_{\text{эфф}}$, В**», результаты занесите в таблицу (см. «Обработка результатов» на с. 106);

е) включите генератор сигнала кнопкой «Питание», убедитесь, что на нем установлены параметры такие же, что и раньше (см. п. 1, б); скопируйте и вставьте в файл график выходной смеси сигнала и шума $u_2(t)$;

ж) на анализаторе сигналов в выпадающем списке «Сигнал» выберите значение **$u_1(t)$** ; измените «Масштаб Y », чтобы сигнал не выходил за пределы графика; скопируйте и вставьте в файл график входной смеси сигнала и шума $u_1(t)$.

2. Исследуйте прохождение прямоугольного импульса и шума через RC -цепь второго порядка с частотой среза $f_{\text{ср}} = 1/\tau_0$. Для этого



на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение $RC2$ и повторите пп. 1, б–е.

3. Исследуйте прохождение прямоугольного импульса и шума через RLC -цепь с добротностью $Q_1 = 0,7$ (ФНЧ Баттерворта 2-го порядка с частотой среза $f_{ср} = 1/\tau_0$). Для этого на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение RLC и повторите пп. 1, б–е.

4. Исследуйте прохождение прямоугольного импульса и шума через согласованный фильтр. Для этого на ИПУ исследуемых цепей установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение «ФСПИ» и повторите пп. 1, б–е.

5. Исследуйте прохождение прямоугольного импульса и шума через квазиоптимальный фильтр. Для этого на ИПУ исследуемых цепей в поле « $R1$, кОм» введите значение $R_{1\text{ опт}}$, рассчитанное в п. 6 домашнего задания; установите переключатель «**Выбор цепи**» в положение $RC1$ и повторите пп. 1, б–е.

Завершение исследований

После просмотра результатов эксперимента преподавателем оставьте лабораторный стенд кнопкой  на панели инструментов, закройте окно лабораторного стенда кнопкой , завершите работу операционной системы и выключите компьютер.

Обработка результатов

1. По результатам эксперимента рассчитайте пиковое отношение сигнал/шум $(С/Ш)_{\text{пик}}$ на выходе исследуемых цепей по формуле (3.14), результаты занесите в приведенную ниже таблицу. В эту же таблицу занесите значения $(С/Ш)_{\text{пик}}$, рассчитанные в домашнем задании.

Параметр		Цепь				
		$RC1$	$RC2$	$RLC (Q_1)$	ФСПИ	$(RC1)_{\text{опт}}$
$U_{\text{пик}}$, В (эксп)						
$\sigma_{\text{вых}}$, В (эксп)						
$(С/Ш)_{\text{пик}}$	расч.					
	эксп.					

2. Составьте отчет по результатам работы. Порядок оформления отчета приведен в главе 1 части III.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какая электрическая цепь называется линейной?
2. Сформулируйте определение комплексной частотной характеристики, амплитудно-частотной характеристики, фазочастотной характеристики линейной электрической цепи.
3. Сформулируйте определения переходной и импульсной характеристик линейной электрической цепи. Как рассчитать переходную и импульсную характеристики?
4. Как рассчитать реакцию линейной электрической цепи на гармоническое воздействие?
5. В чем состоит принцип суперпозиции? Каким образом он используется при анализе прохождения сигналов через линейные электрические цепи?
6. Как определить реакцию цепи на сложное воздействие, зная а) переходную характеристику; б) импульсную характеристику?
7. Сформулируйте определения детерминированного и случайного сигналов. Приведите примеры детерминированных и случайных сигналов.
8. Что называется спектральным разложением сигнала? Как изменится спектральный состав сигнала при прохождении через линейную цепь?
9. В чем состоит спектральный метод анализа прохождения сигналов через линейные электрические цепи?
10. Сформулируйте условие неискаженного прохождения сигнала через линейную электрическую цепь. Какие требования для этого предъявляются к характеристикам цепи?
11. Сформулируйте определение энергетического спектра сигнала. Как рассчитать энергию сигнала во временной и частотной областях?

12. Сформулируйте определение автокорреляционной функции сигнала. Как рассчитать АКФ сигнала, какими свойствами обладает АКФ?

13. Что называется случайным процессом, реализацией, сечением случайного процесса?

14. Какими вероятностными и числовыми характеристиками описывается случайный процесс?

15. Сформулируйте определение стационарного случайного процесса.

16. Сформулируйте определение эргодического случайного процесса. Как рассчитать характеристики эргодического случайного процесса?

17. Сформулируйте определение и физический смысл спектральной плотности мощности случайного процесса. Как связана спектральная плотность мощности с другими характеристиками случайного процесса?

18. Какие существуют формы записи спектральной плотности мощности случайного процесса? Что называется односторонним спектром мощности?

19. Как определить и какой физический смысл имеет интервал корреляции случайного процесса?

20. Сформулируйте определение белого шума. В каких задачах применяется данная математическая модель?

21. Как рассчитать характеристики случайного процесса на выходе линейной электрической цепи?

22. В чем состоит принцип линейной частотной фильтрации сигнала на фоне шума? Как оценить отношение сигнал/шум на входе и выходе цепи?

23. В чем состоит принцип оптимальной линейной фильтрации сигнала? Чему равно отношение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра?

24. Чему равны импульсная характеристика, АЧХ и ФЧХ согласованного фильтра?

25. Изобразите графически импульсную характеристику и АЧХ фильтра, согласованного с прямоугольным видеоимпульсом.

26. Какой фильтр называется квазиоптимальным? Приведите примеры квазиоптимального фильтра.

27. Какая из цепей обеспечит наилучшее отношение сигнал/шум на выходе при фильтрации гармонического сигнала и почему: а) RC -цепь 1-го порядка, б) ФНЧ Баттерворта 2-го порядка, в) RLC -цепь с добротностью $Q > 1$?

28. Какой из типов фильтров обеспечит наилучшее пиковое отношение сигнал/шум на выходе при фильтрации импульсного сигнала: а) RC -цепь 1-го порядка, б) ФНЧ Баттерворта 2-го порядка, в) согласованный фильтр?

29. Какой из типов фильтров обеспечит наименьшее искажение формы прямоугольного видеоимпульса и почему: а) RC -цепь 1-го порядка, б) ФНЧ Баттерворта 2-го порядка, в) согласованный фильтр?

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атабеков Г. И. Основы теории цепей : учебник. 3-е изд., стер. СПб., М., Краснодар : Лань, 2009. 432 с.
2. Попов В. П. Основы теории цепей : учеб. для вузов. 6-е изд., испр. М. : Высшая школа, 2007. 575 с.
3. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. для студентов вузов, обучающихся по спец. «Радиотехника». 5-е изд., стер. М. : Высшая школа, 2005. 462 с.
4. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению подг. «Радиотехника». 5-е изд., испр. М. : Дрофа, 2006. 720 с.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: учебник для вузов. 9-е изд., стер. М. : Академия, 2003. 576 с.
6. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М. : Лань, 2009. 608 с.
7. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы: Руководство к решению задач. 3-е изд. СПб. : Ленанд, 2015. 224 с.
8. LabVIEW [Электронный ресурс]: Руководство пользователя / National Instruments, 2007. Режим доступа: <http://www.ni.com> (дата обращения: 19.11.18).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Данные к лабораторным работам

Таблица П1.1

Параметры исследуемых цепей⁶

Параметр	Номер стенда									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{\text{ср}}, f_0^6$, кГц	3	3,5	4	4,5	5	3,3	3,7	4,3	4,8	5,3
C_1, C_2 , нФ	10	10	10	10	10	6,8	6,8	6,8	6,8	6,8
ρ , кОм	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
Q_1	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
Q_2	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	2	2,2	2,4	2,6	2,8

Таблица П1.2

Соотношение частоты сигнала и частоты среза
для лабораторной работы № 2

Параметр	Номер стенда									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f/f_{\text{ср}}$	0,12	0,15	0,2	0,25	0,28	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5

Таблица П1.3

Отношение сигнал/шум на входе цепей для лабораторной работы № 3

Параметр	Номер стенда									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$(C/\text{Ш})_{\text{вх}}$	0,64	1,0	1,44	1,96	0,64	1,0	1,44	1,96	1,0	1,44

⁶ $f_{\text{ср}}$ используется для расчета параметров RC -цепей и фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом, а f_0 — для расчета параметров RLC -цепи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Примеры расчетов к лабораторной работе № 1 в программе Mathcad

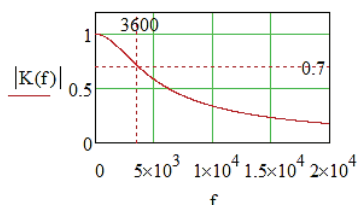
Пример расчетов для RC-цепи 1-го порядка

$$f_c := 3600 \quad // \text{Частота среза, Гц}$$

$$C1 := 10 \cdot 10^{-9} \quad // \text{Емкость цепи, Ф}$$

$$R1 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot C1} = 4.421 \times 10^3 \quad // \text{Расчет сопротивления цепи, Ом}$$

$$K(f) := \frac{1}{1 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R1 \cdot C1} \quad // \text{Комплексный коэффициент передачи цепи}$$



// График АЧХ
// (показана частота среза)

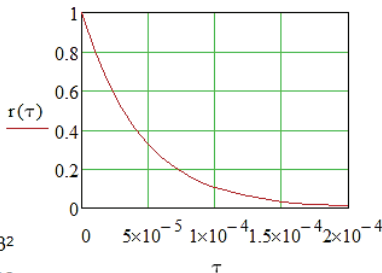
$$N0 := \frac{1}{250 \cdot 10^3} = 4 \times 10^{-6} \quad // \text{Спектр мощности входного шума, В}^2/\text{Гц}$$

$$R(\tau) := N0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|K(f)|)^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau) df \quad // \text{Вычисление функции корреляции}$$

$$r(\tau) := \frac{R(\tau)}{R(0)}$$

$$\tau := 0, 10 \cdot 10^{-6} \dots 200 \cdot 10^{-6}$$

$\tau =$	$R(\tau) =$	$r(\tau) =$
0	0.022	1
$1 \cdot 10^{-5}$	0.018	0.805
$2 \cdot 10^{-5}$	0.014	0.642
$3 \cdot 10^{-5}$	0.011	0.512
$4 \cdot 10^{-5}$	$9.152 \cdot 10^{-3}$	0.408
...



$$R(0) = 0.022 \quad // \text{Дисперсия, В}^2$$

$$\sigma := \sqrt{R(0)} = 0.15 \quad // \text{Эффективное значение, В}$$

$$\tau_k := \int_0^{2 \cdot 10^{-4}} |r(\tau)| d\tau = 4.413 \times 10^{-5} \quad // \text{Интервал корреляции, с}$$

Пример расчетов для RC-цепи 2-го порядка
(расчет для каждой цепи выполнен отдельным файлом)

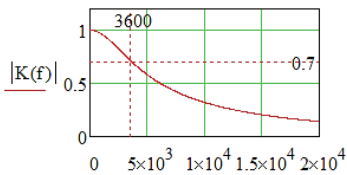
$$f_c := 3600 \quad // \text{Частота среза, Гц}$$

$$C2 := 10 \cdot 10^{-9} \quad // \text{Емкость цепи, Ф}$$

$$R2 := \frac{0.374}{2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot C2} = 1.653 \times 10^3 \quad // \text{Расчет сопротивления цепи, Ом}$$

$$K(f) := \frac{1}{1 - (2 \cdot \pi \cdot f \cdot R2 \cdot C2)^2 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 3R2 \cdot C2} \quad // \text{Комплексный коэффициент}$$

$$// \text{передачи цепи}$$



// График АЧХ
// (показана частота среза)

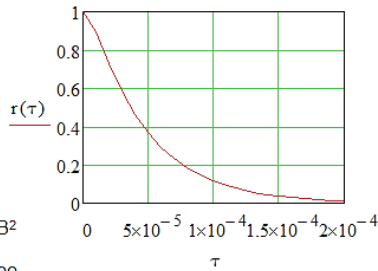
$$N0 := \frac{1}{250 \cdot 10^3} = 4 \times 10^{-6} \quad // \text{Спектр мощности входного шума, В}^2/\text{Гц}$$

$$R(\tau) := N0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|K(f)|)^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau) df \quad // \text{Вычисление функции корреляции}$$

$$r(\tau) := \frac{R(\tau)}{R(0)}$$

$$\tau := 0, 10 \cdot 10^{-6} .. 200 \cdot 10^{-6}$$

$\tau =$	$R(\tau) =$	$r(\tau) =$
0	0.02	1
$1 \cdot 10^{-5}$	0.018	0.894
$2 \cdot 10^{-5}$	0.015	0.73
$3 \cdot 10^{-5}$	0.012	0.584
$4 \cdot 10^{-5}$	$9.362 \cdot 10^{-3}$	0.464
...



$$R(0) = 0.02 \quad // \text{Дисперсия, В}^2$$

$$\sigma := \sqrt{R(0)} = 0.142 \quad // \text{Эффективное}$$

$$// \text{значение, В}$$

$$\tau_k := \int_0^{2 \cdot 10^{-4}} |r(\tau)| d\tau = 4.911 \times 10^{-5} \quad // \text{Интервал корреляции}$$

Пример расчетов для RLC-цепи (для добротности Q2)

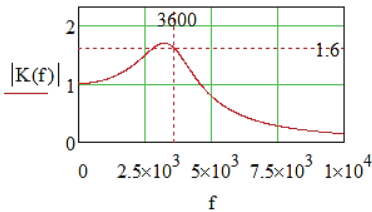
$f_0 := 3600$ // Резонансная частота, Гц
 $\rho := 1200$ // Характеристическое сопротивление, Ом
 $Q := 1.6$ // Добротность

$$L := \frac{\rho}{2 \cdot \pi \cdot f_0} \cdot 1000 = 53.052 \quad // \text{Индуктивность цепи, мГн}$$

$$C4 := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot \rho} \cdot 10^9 = 36.841 \quad // \text{Емкость цепи, нФ}$$

$$R4 := \frac{\rho}{Q \cdot 1000} = 0.75 \quad // \text{Сопротивление цепи, кОм}$$

$$K(f) := \frac{(2 \cdot \pi \cdot f_0)^2}{(i \cdot 2 \pi \cdot f)^2 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot f_0}{Q} + (2 \cdot \pi \cdot f_0)^2} \quad // \text{Комплексный коэффициент передачи цепи}$$



// График АЧХ
 // (показана резонансная частота f_0 ,
 // $K(f_0)=Q$)

$$N_0 := \frac{1}{250 \cdot 10^3} = 4 \times 10^{-6} \quad // \text{Спектр мощности входного шума, В}^2/\text{Гц}$$

$$R(\tau) := N_0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|K(f)|)^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau) df \quad // \text{Вычисление функции корреляции}$$

$$r(\tau) := \frac{R(\tau)}{R(0)}$$

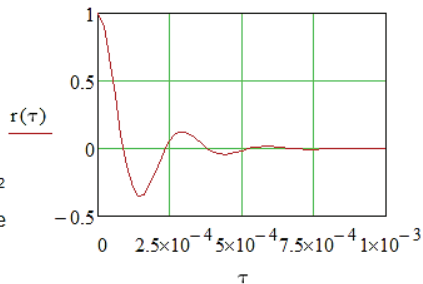
$$\tau := 0, 20 \cdot 10^{-6} .. 1000 \cdot 10^{-6}$$

$\tau =$	$R(\tau) =$	$r(\tau) =$
0	0.036	1
$2 \cdot 10^{-5}$	0.033	0.908
$4 \cdot 10^{-5}$	0.025	0.68
...

$$R(0) = 0.036 \quad // \text{Дисперсия, В}^2$$

$$\sigma := \sqrt{R(0)} = 0.19 \quad // \text{Эффективное значение, В}$$

$$\tau_k := \int_0^{1 \cdot 10^{-3}} |r(\tau)| d\tau = 1.013 \times 10^{-4} \quad // \text{Интервал корреляции, с}$$

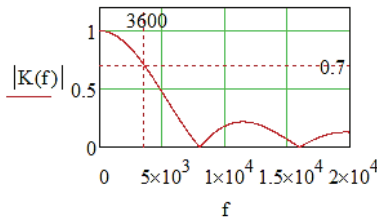


Пример расчетов для фильтра, согласованного с прямоугольным импульсом

$f_c := 3600$ // Частота среза, Гц

$\tau_i := \frac{0.45}{f_c} = 1.25 \times 10^{-4}$ // Длительность импульса, с

$$K(f) := \frac{\sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau_i}{2}\right)}{\frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau_i}{2}} \quad // \text{Комплексный коэффициент передачи фильтра}$$



// График АЧХ
// (показана частота среза)

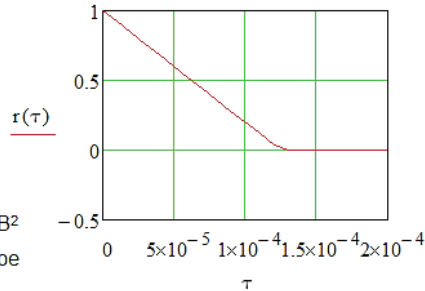
$$N_0 := \frac{1}{250 \cdot 10^3} = 4 \times 10^{-6} \quad // \text{Спектр мощности входного шума, В}^2/\text{Гц}$$

$$R(\tau) := N_0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|K(f)|)^2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau) df \quad // \text{Вычисление функции корреляции}$$

$$r(\tau) := \frac{R(\tau)}{R(0)}$$

$$\tau := 0, 10 \cdot 10^{-6} .. 200 \cdot 10^{-6}$$

$\tau =$	$R(\tau) =$	$r(\tau) =$
0	0.016	1
$1 \cdot 10^{-5}$	0.015	0.923
$2 \cdot 10^{-5}$	0.013	0.843
$3 \cdot 10^{-5}$	0.012	0.763
...



$$R(0) = 0.016 \quad // \text{Дисперсия, В}^2$$

$$\sigma := \sqrt{R(0)} = 0.126 \quad // \text{Эффективное значение, В}$$

$$\tau_k := \int_0^{2 \cdot 10^{-4}} |r(\tau)| d\tau = 6.271 \times 10^{-5} \quad // \text{Интервал корреляции, с}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Пример расчетов к лабораторной работе № 2 в программе Mathcad

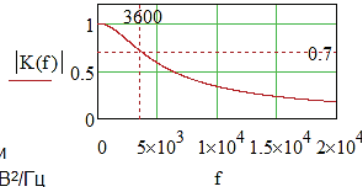
Пример расчетов для RC-цепи 1-го порядка

$R1 := 4.42 \cdot 10^3$ // Сопротивление цепи, Ом (рассчитано в лаб.работе №1)

$C1 := 10 \cdot 10^{-9}$ // Емкость цепи, Ф

$K(f) := \frac{1}{1 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R1 \cdot C1}$ // Комплексный коэффициент передачи цепи

// График АЧХ,
// построен для проверки
// (показана частота среза)



$N0 := \frac{1}{250 \cdot 10^3} = 4 \times 10^{-6}$ // Спектр мощности
// входного шума, В²/Гц

$\sigma_{2out} := N0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|K(f)|)^2 df = 0.022$ // Расчет дисперсии
// выходного шума, В²

$f := 1080$ $Um := 1.41$ // Частота, Гц и амплитуда, В входного сигнала
// для п.2 домашнего задания (рассчитаны вручную)

$|K(f)| = 0.958$ $Umout := Um \cdot |K(f)| = 1.351$

$S_{Nout} := \frac{1}{2} \cdot \frac{Umout^2}{\sigma_{2out}} = 40.684$ // Расчет (С/Ш)вых для п.2

$f0 := 3600$ $Q2 := 1.6$ // Расчеты для п.3 домашнего задания

$fmax := f0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot Q2^2}} = 3.229 \times 10^3$

$|K(fmax)| = 0.744$ $Umout_fmax := Um \cdot |K(fmax)| = 1.05$

$S_{Nout_fmax} := \frac{1}{2} \cdot \frac{Umout_fmax^2}{\sigma_{2out}} = 24.576$

$f1 := 360$ $f2 := 1800$ $f3 := 3600$ // Частоты, Гц и амплитуды, В
// входных сигналов для п.4
 $Um1 := 0.816$ $Um2 := Um1$ $Um3 := Um1$ // домашнего задания
// (рассчитаны вручную)

$|K(f1)| = 0.995$ $Um1out := Um1 \cdot |K(f1)| = 0.812$

$|K(f2)| = 0.894$ $Um2out := Um2 \cdot |K(f2)| = 0.73$

$|K(f3)| = 0.707$ $Um3out := Um3 \cdot |K(f3)| = 0.577$

$S_{Nout} := \frac{1}{2} \cdot \frac{Um1out^2 + Um2out^2 + Um3out^2}{\sigma_{2out}} = 34.014$ // Расчет (С/Ш)вых для п.4

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Примеры расчетов к лабораторной работе № 3 в программе Mathcad

Расчет характеристик входного сигнала

$f_c := 3600$ // Частота среза, Гц

$S_N_in := 1.0$ // Отношение сигнал/шум на входе

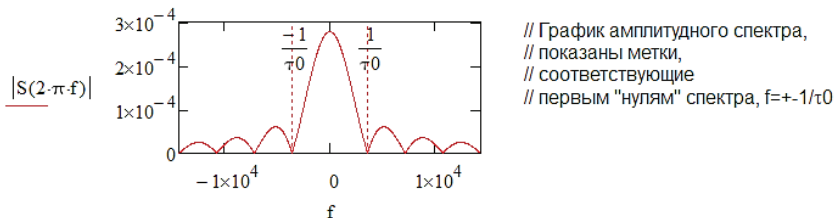
$U_{n_in_eff} := 1$ // Эффективное напряжение входного шума, В

$$\tau_0 := \frac{1}{f_c} = 2.778 \times 10^{-4} \quad // \text{Расчет длительности импульса, с}$$

$$U_0 := \sqrt{S_N_in \cdot U_{n_in_eff}} = 1 \quad // \text{Расчет амплитуды импульса, В}$$

$$S_x(\omega) := U_0 \cdot \tau_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega \cdot \tau_0}{2}\right)}{\frac{\omega \cdot \tau_0}{2}} \quad // \text{Спектральная плотность прямоугольного импульса}$$

// (взята готовая формула из литературы)



Расчеты для RC-цепи 1-го порядка

$C_1 := 10 \cdot 10^{-9}$ // Емкость цепи, Ф

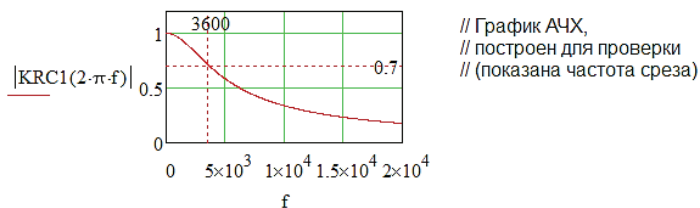
$R_1 := 4.42 \cdot 10^3$ // Сопротивление цепи, Ом (из расчетов к лабораторной работе №1)

$$f_{cRC1} := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot C_1} = 3.601 \times 10^3 \quad // \text{Расчет частоты среза, Гц}$$

// для проверки

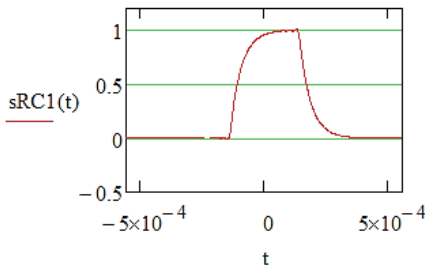
$$KRC1(\omega) := \frac{1}{1 + i \cdot \omega \cdot R_1 \cdot C_1} \quad // \text{Комплексный коэффициент передачи}$$

// RC-цепи 1-го порядка



$$s_{RC1}(t) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-20 \cdot \pi \cdot f_c}^{20 \cdot \pi \cdot f_c} S(\omega) \cdot K_{RC1}(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

// Расчет выходного сигнала
// спектральным методом,
// пределы интегрирования
// взяты таким образом,
// чтобы $S(\omega)$, $K(\omega) < 0,01$,
// пределы $\pm 2\pi \cdot 10f_c$



// График выходного сигнала

$$U_{\text{pik_RC1}} := 1$$

// Пиковое напряжение выходного сигнала, В,
// определено по графику

$$N_0 := \frac{1}{250 \cdot 10^3} = 4 \times 10^{-6}$$

// Спектр мощности входного шума, В²/Гц

$$\sigma_{2_RC1} := N_0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|K_{RC1}(2 \cdot \pi \cdot f)|)^2 df = 0.022$$

// Расчет
// дисперсии шума, В²

$$S_{N_RC1} := \frac{U_{\text{pik_RC1}}^2}{\sigma_{2_RC1}} = 44.609$$

// Расчет пикового отношения (С/Ш)
// на выходе цепи

Расчеты для RC-цепи 2-го порядка

(все расчеты выполнены в одном файле)

$$C2 := 10 \cdot 10^{-9}$$

// Емкость цепи, Ф

$$R2 := 1.65 \cdot 10^3$$

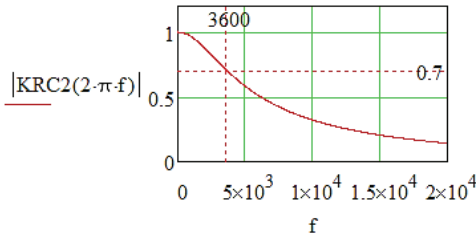
// Сопротивление цепи, Ом (из расчетов к лабораторной работе №1)

$$f_{cRC2} := \frac{0.374}{2 \cdot \pi \cdot R2 \cdot C2} = 3.608 \times 10^3$$

// Расчет частоты среза, Гц
// для проверки

$$K_{RC2}(\omega) := \frac{1}{(i \cdot \omega)^2 \cdot (R2 \cdot C2)^2 + i \cdot \omega \cdot 3 \cdot R2 \cdot C2 + 1}$$

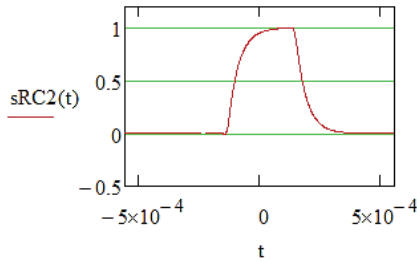
// Комплексный коэффициент
// передачи



// График АЧХ
// построен для проверки
// (показана частота среза)

$$sRC2(t) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-20 \cdot \pi \cdot fc}^{20 \cdot \pi \cdot fc} S(\omega) \cdot KRC2(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

// Расчет выходного сигнала
// спектральным методом,
// (аналогично RC-цепи 1-го
// порядка)



// График выходного сигнала

$$Upik_RC2 := 1$$

// Пиковое напряжение выходного сигнала, В,
// определено по графику

$$\sigma2_RC2 := N0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|KRC2(2 \cdot \pi \cdot f)|)^2 df = 0.02$$

// Расчет
// дисперсии шума, В²

$$S_N_RC2 := \frac{Upik_RC2^2}{\sigma2_RC2} = 49.502$$

// Расчет пикового отношения (С/Ш)
// на выходе цепи

Расчеты для RLC-цепи при $Q1 = 0,7$ (ФНЧ Баттерворта)

$$L_{\omega} := 53.05 \cdot 10^{-3}$$

// Параметры элементов, из расчетов к лабораторной работе №1
// L, Гн, C4, Ф, R4, Ом

$$C4 := 36.84 \cdot 10^{-9}$$

$$R4 := 1.71 \cdot 10^3$$

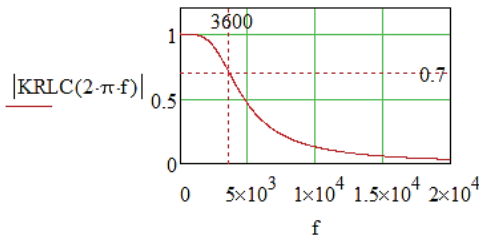
$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C4}} = 2.262 \times 10^4 \quad \begin{array}{l} // \text{Расчет параметров цепи для проверки} \\ // \text{и для дальнейших расчетов} \end{array}$$

$$f_0 := \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} = 3.6 \times 10^3$$

$$\rho := \sqrt{\frac{L}{C4}} = 1.2 \times 10^3$$

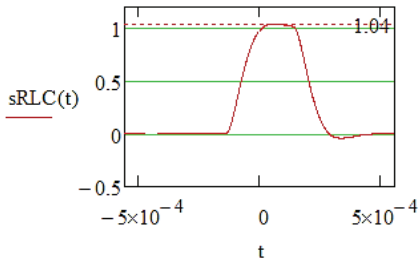
$$Q1 := \frac{\rho}{R4} = 0.702$$

$$KRLC(\omega) := \frac{\omega^2}{(i \cdot \omega)^2 + i \cdot \omega \cdot \frac{\omega_0}{Q1} + \omega_0^2} \quad \begin{array}{l} // \text{Комплексный коэффициент} \\ // \text{передачи цепи} \end{array}$$



// График АЧХ для проверки,
// показана частота среза,
// fcp=f0, K(f0)=Q=0,7

$$sRLC(t) := \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-20 \cdot \pi \cdot f_c}^{20 \cdot \pi \cdot f_c} S(\omega) \cdot KRLC(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega \quad \begin{array}{l} // \text{Расчет выходного сигнала} \\ // \text{спектральным методом} \end{array}$$



// График выходного сигнала

$$Upik_RLC := 1.04 \quad \begin{array}{l} // \text{Пиковое напряжение выходного сигнала, В,} \\ // \text{определено по графику} \end{array}$$

$$\sigma_{2_RLC} := N0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|KRLC(2 \cdot \pi \cdot f)|)^2 df = 0.016 \quad \begin{array}{l} // \text{Расчет} \\ // \text{дисперсии шума, В}^2 \end{array}$$

$$S_{N_RLC} := \frac{U_{pik_RLC}^2}{\sigma_{2_RLC}} = 68.137 \quad \begin{array}{l} // \text{Расчет пикового отношения (С/Ш)} \\ // \text{на выходе цепи} \end{array}$$

Расчеты для согласованного фильтра

$$E_s := U_0^2 \cdot \tau_0 = 2.778 \times 10^{-4} \quad // \text{Энергия прямоугольного импульса}$$

$$S_{N_sf} := \frac{2 \cdot E_s}{N_0} = 138.889 \quad // \text{Расчет отношения (С/Ш)}$$

Расчеты для квазиоптимального фильтра

$$\tau_{RCopt} := \frac{\tau_0}{1.25} = 2.222 \times 10^{-4} \quad // \text{Расчет оптимальной постоянной времени, с}$$

$$R_{1opt} := \frac{\tau_{RCopt}}{C_1} = 2.222 \times 10^4 \quad // \text{Расчет оптимального сопротивления, Ом}$$

$$f_{copt} := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau_{RCopt}} = 716.197 \quad // \text{Расчет оптимальной частоты среза, Гц}$$

$$U_{pik_opt} := U_0 \cdot \left(1 - e^{\frac{-\tau_0}{\tau_{RCopt}}} \right) = 0.713 \quad \begin{array}{l} // \text{Расчет пикового значения} \\ // \text{выходного сигнала, В} \end{array}$$

$$KRC1opt(\omega) := \frac{1}{1 + i \cdot \omega \cdot R_{1opt} \cdot C_1} \quad \begin{array}{l} // \text{Комплексный коэффициент передачи} \\ // \text{(RC-цепь первого порядка с } R_{1opt}) \end{array}$$

$$\sigma_{2_opt} := N_0 \cdot \int_0^{250 \cdot 10^3} (|KRC1opt(2 \cdot \pi \cdot f)|)^2 df = 4.492 \times 10^{-3} \quad // \text{Дисперсия, В}^2$$

$$S_{N_opt} := \frac{U_{pik_opt}^2}{\sigma_{2_opt}} = 113.335 \quad \begin{array}{l} // \text{Расчет пикового отношения (С/Ш)} \\ // \text{на выходе фильтра} \end{array}$$

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АКФ — автокорреляционная функция
АЧХ — амплитудно-частотная характеристика
ВКФ — взаимная корреляционная функция
ДУ — дифференциальное уравнение
ИПУ — интерактивная панель управления
ПК — персональный компьютер
ПФ — полосовой фильтр
СФОИ — согласованный фильтр для одиночного импульса
ФВЧ — фильтр верхних частот
ФНЧ — фильтр нижних частот
ФСПИ — фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом
ФЧХ — фазочастотная характеристика
RMS — root mean square (среднеквадратическое значение)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ЧАСТЬ I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ.....	4
1. Линейные электрические цепи и их характеристики	4
1.1. Основные определения	4
1.2. Метод комплексных амплитуд.....	6
1.3. Принцип суперпозиции	8
1.4. Частотные характеристики цепей.....	9
1.5. Временные характеристики цепей.....	12
1.6. Операторные характеристики цепей	14
1.7. Временной метод	15
2. Основы теории детерминированных сигналов	17
2.1. Основные определения	17
2.2. Спектральный анализ сигналов	19
2.3. Спектральный метод	25
2.4. Связь временного и спектрального методов	26
2.5. Условие неискаженного прохождения сигнала	27
2.6. Энергетический спектр сигнала.....	27
2.7. Корреляционный анализ сигналов.....	28
3. Основы теории случайных сигналов.....	29
3.1. Основные определения	29
3.2. Характеристики случайных сигналов в частотной области	32
3.3. Источники шумов в электрических цепях	35
3.4. Прохождение случайных сигналов через линейные электрические цепи	37
4. Совместное прохождение сигнала и шума через линейные электрические цепи.....	40

4.1. Принцип линейной частотной фильтрации.....	40
4.2. Оптимальная фильтрация сигналов известной формы	44
ЧАСТЬ II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ.....	49
1. Примеры решения задач.....	49
1.1. Прохождение прямоугольного импульса через RC -цепь.....	49
1.2. Прохождение белого шума через RC -цепь	52
1.3. Прохождение белого шума через ФНЧ второго порядка.....	56
1.4. Прохождение белого шума через частотно- избирательную цепь	58
1.5. Построение согласованного фильтра для прямоугольного импульса.....	61
1.6. Построение квазиоптимального фильтра для прямоугольного импульса	66
1.7. Построение согласованного фильтра для пачки импульсов	67
2. Задания для самостоятельного решения	69
Задание 1.....	69
Задание 2.....	72
ЧАСТЬ III. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ	74
1. Порядок проведения лабораторных работ.....	74
2. Описание исследуемых цепей	75
2.1. RC -цепь первого порядка	76
2.2. RC -цепь второго порядка	77
2.3. Последовательная RLC -цепь.....	78
2.4. Фильтр, согласованный с прямоугольным импульсом.....	80
3. Описание лабораторного стенда	82
4. Лабораторная работа № 1. Исследование функций корреляции случайных процессов на выходе линейных электрических цепей	87
5. Лабораторная работа № 2. Исследование принципа линейной частотной фильтрации сигнала на фоне шума	93
6. Лабораторная работа № 3. Исследование методов фильтрации импульсного сигнала на фоне шума	100

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.....	107
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	110
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Данные к лабораторным работам.....	111
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Примеры расчетов к лабораторной работе № 1 в программе Mathcad.....	112
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Пример расчетов к лабораторной работе № 2 в программе Mathcad.....	116
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Пример расчетов к лабораторной работе № 3 в программе Mathcad.....	117
ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ.....	122

Учебное издание

Шилов Юрий Владиславович

**ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛА И ШУМА
ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**

Редактор В. О. Корионова
Верстка Е. В. Ровнушкиной

Подписано в печать 28.11.2018. Формат 70×100 1/16.
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 10,32.
Уч.-изд. л. 6,1. Тираж 40 экз. Заказ 16.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
<http://print.urfu.ru>

Для заметок

